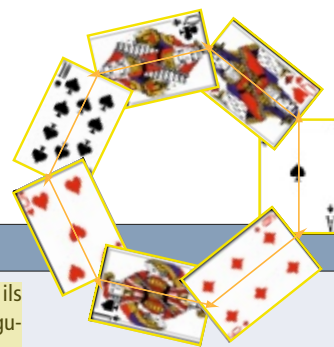




5. Une preuve mentale du théorème de Wilson

Théorème de Wilson : si p est premier, alors $(p-1)! + 1$ est divisible par p . Ce résultat était connu du mathématicien arabe Alhasen (965-1039) ; il doit son nom

On imagine un jeu de 52 cartes et on associe une direction à chaque couleur : Nord pour pique, Ouest pour trèfle, Est pour carreau, Sud pour cœur. On mélange les cartes et on en déduit une promenade aléatoire en prenant les cartes une à une et en les mettant à la suite l'une de l'autre. Comme il y a autant de Nord que de Sud et autant d'Ouest que d'Est, le parcours ramène au point de départ.

Prenons maintenant un jeu de p cartes, p étant un nombre premier. Soit l'angle $360^\circ/p$ (un p -ième d'un tour complet) qu'on dénommera angle de base. On numérote les cartes par les entiers de 0 à $p-1$. À la carte i , on associe i fois l'angle de base. Comme précédemment, quel que soit l'ordre des cartes, le parcours aléatoire qu'on en déduit ramène au point de départ. Pour le voir, on considère les p vecteurs unitaires associés à

ces p angles pris dans l'ordre : ils dessinent un grand polygone régulier à p côtés et donc leur somme est nulle. Dans un autre ordre, elle reste bien sûr nulle.

On réfléchit maintenant aux $p!$ promenades aléatoires engendrées par les différentes façons de classer les cartes. Comme le point de départ est sans importance, il n'y a que $(p-1)!$ promenades aléatoires différentes.

Certaines promenades sont peut-être invariantes par rotation, mais puisque p est premier, cela ne peut être que par la rotation de l'angle de base. Les promenades invariantes par rotation de l'angle de base sont faciles à identifier : ce sont celles qui dessinent les étoiles régulières faites en prenant p points régulièrement espacés sur une circonférence. Il y en a exactement $p-1$ (il y a deux fois moins d'étoiles, mais chacune donne deux promenades selon

la façon dont on la parcourt). Il y a donc en tout $(p-1)! - (p-1)$ promenades différentes asymétriques.

Toute rotation d'une promenade asymétrique par un multiple de l'angle de base en donne une autre. Les promenades asymétriques se regroupent donc en paquets de p (dans un paquet, toutes les promenades s'obtiennent en faisant tourner l'une d'elles par les multiples de l'angle de base). Le nombre $(p-1)! - (p-1)$ est donc divisible par p , donc $(p-1)! + 1$ aussi. CQFD.

La réciproque conduit à une caractérisation des nombres premiers. Elle se fait mentalement aussi : si $p > 4$ est composé, alors $(p-1)!$ est divisible par p (traiter le cas p carré parfait, puis p non carré), donc $(p-1)! + 1$ ne l'est pas. Pour $p = 4$, on a $(p-1)! + 1 = 7$, non divisible par 4.

à John Wilson (1741-1793) qui l'énonça en 1770 sans le démontrer, chose faite trois ans plus tard par Joseph-Louis Lagrange.

teur et vous proposent des démonstrations animées parfaitement convaincantes (*voir* <http://clem.mscedu/~talman/MathAnim.html> pour une collection de telles animations).

Des preuves mentales

À l'opposé des preuves sans mots, il y a les preuves sans dessins ni symbolisme mathématique, qu'on pourrait qualifier de mentales. Lors d'une promenade à pied avec un ami, vous la raconterez... et cela même en pleine nuit. Pour peu qu'il soit assez attentif, en vous écoutant, votre ami comprendra et se trouvera donc à la fin de votre exposé convaincu d'un résultat mathématique nouveau. Récemment, le mathématicien britannique Adam Goucher a proposé une preuve mentale et géométrique [ce n'est pas incompatible !] du théorème de Wilson. Ce théorème donne une caractérisation des nombres premiers comme nombres p qui divisent $(p-1)! + 1$ (*voir la figure 5*). Je vous recommande cette

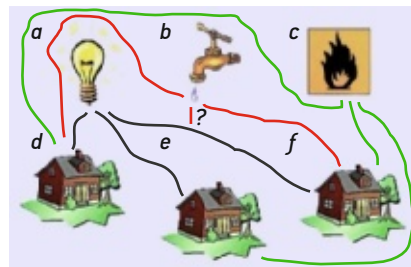
preuve pour votre prochaine excursion en montagne. Elle vous fera sentir, bien mieux que les preuves usuelles fondées sur des connaissances peu intuitives d'arithmétique modulaire, que le théorème est vrai : en un mot, elle vous fera accéder à cet état de conviction profonde qui constitue la compréhension mathématique véritable. Du fait de leur nature verbale, les preuves mentales sont en général faciles à traduire en preuves formelles.

Prouver en bougeant son corps

Les mouvements et les actions qu'on effectue soi-même sont un bon moyen de se persuader d'une vérité. Cette implication du corps dans le processus de démonstration est parfois le moyen le plus efficace d'arriver à l'état de certitude intime à propos d'un énoncé mathématique.

L'exemple du problème des trois maisons de Henry Dudeney qui doivent avoir l'eau, le

gaz et l'électricité illustre cette situation (*voir ci-dessous*). Il lui correspond le théorème affirmant que le graphe $K_{3,3}$ [où trois points a , b et c rejoignent chacun trois autres points d , e et f] n'est pas planaire, c'est-à-dire ne peut pas être dessiné sur un plan sans que les tracés des jonctions ne se coupent. Qui-conque essaye pendant dix minutes de résoudre le problème de Dudeney avec un papier, un crayon et une gomme, atteint cet état de certitude absolue que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.



Le problème des trois maisons de Henry Dudeney : les tracés reliant $\{a, b, c\}$ à $\{d, e, f\}$ se coupent forcément au moins une fois.