

Ces mouvements réalisés pour soi construisent une conviction privée, mais une démonstration doit être communicable. Ici, on ne peut donc pas considérer que la certitude acquise par manipulation vaut pour démonstration. Heureusement, l'énoncé que $K_{3,3}$ n'est pas planaire a des démonstrations au sens usuel... quoique utilisant de façon plus ou moins directe le théorème de Jordan et donc délicates à formaliser.

Démonstrations de physiciens

Notre connaissance instinctive ou apprise de la physique nous conduit à être certain d'énoncés pourtant purement mathématiques. Ces preuves d'énoncés mathématiques par le raisonnement physique peuvent difficilement être considérées comme de vraies preuves mathématiques et on ne sait pas ce qu'en aurait dit Thom. Cependant, elles sont fascinantes et il ne fait pas de doute qu'elles conduisent dans un état de certitude parfois aussi fort que les preuves vraiment mathématiques. La

rubrique de février 2010 qui présentait un livre de Mark Levi consacré au sujet en donnait une série d'exemples (*voir l'encadré 4 pour un autre*). Ces preuves sont délicates à analyser pour le mathématicien, car la preuve s'appuie sur des lois ou des considérations physiques qui ne sont pas permises habituellement en mathématiques. D'ailleurs, si les lois physiques ne sont pas vraies (une loi physique n'est jamais démontrée définitivement), il se pourrait que ce qu'on en a déduit de purement mathématique soit faux. L'analyse approfondie de ces preuves ferait peut-être découvrir qu'elles sont exprimables en contournant les hypothèses physiques qui y sont à l'œuvre. Le problème n'est pas très simple et il semble qu'il y ait là un beau sujet de recherche logique qui, à ma connaissance, n'a pas été traité.

La simple observation d'un programme qui affiche des images sur un écran constitue parfois une preuve entraînant une parfaite adhésion. Ce type de preuves est rarement mentionné par ceux qui réfléchissent à la nature des mathématiques

et des démonstrations. Pourtant, il existe des domaines où elles jouent un rôle central, totalement irremplaçable, et où personne n'a le moindre doute sur les énoncés mathématiques qu'il produit.

Considérons l'énoncé suivant : il existe une configuration du *Jeu de la vie* de Conway de dix cellules créant des configurations dont le nombre de cellules tend vers l'infini.

Observer le déroulement d'un programme

C'est un énoncé mathématique très simple. Il n'a été démontré qu'en 1997 par Paul Callahan, 30 ans après l'invention du jeu. En quoi consiste sa démonstration ? En la présentation d'une configuration de dix cellules (la trouvaille), suivie de l'observation de 1 000 générations successives du devenir de la configuration. Ces 1 000 générations ne peuvent pas se calculer à la main, car assez rapidement elles font intervenir un grand nombre de cellules. À partir de la génération 1 000, le calcul présente une régularité : une partie de la configuration est stable alors qu'une autre partie avance, laissant derrière elle des cellules vivantes de plus en plus nombreuses et formant un motif périodique.

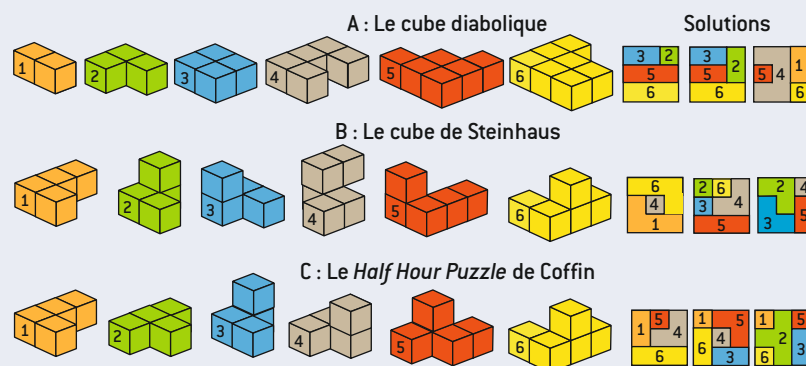
La conviction que cela se poursuit est totale. En effet, d'une part, le programme a été testé un grand nombre de fois et nul ne doute qu'il calcule comme il faut (on peut aussi refaire fonctionner la configuration initiale de dix cellules avec un autre programme) ; d'autre part, la régularité de ce qu'on observe ne laisse pas de doute sur l'idée que la croissance se poursuivra indéfiniment. C'est bien l'observation du programme en train de fonctionner en continu qui crée cet état d'évidence entraînant l'adhésion dont parlait Thom et qui caractérise les preuves rigoureuses.

L'étude du *Jeu de la vie* et de bien d'autres automates cellulaires conduit à pratiquer ce type de démonstrations et essentiellement celui-là. On y prouve des théorèmes dont certains sont si peu évidents qu'on ne les a découverts qu'après plusieurs décennies

6. Les démonstrations par manipulation

Si vous réussissez à ranger la boîte de cubes, vous en tirerez sans mal une preuve descriptive du théorème géométrique affirmant que ce rangement est possible. En revanche, si, après avoir essayé durant une heure de ranger une boîte avec six pièces, vous n'avez pas réussi, vous serez persuadé que c'est impossible et n'aurez pas le moindre doute. La conviction acquise « par manipulation » que la boîte ne peut pas être rangée sera malheureusement incommunicable et ne constituera donc pas une preuve mathématique acceptable.

Le cube diabolique (A), qui date du XIX^e siècle, est, semble-t-il, le plus ancien problème de rangement du cube. Le cube de Steinhaus (B) a été inventé en 1930 et le *Half Hour Puzzle* de Coffin, inventé vers 1970 (C), se remonte après une demi-heure de réflexion... Les solutions à droite représentent les trois vues du cube (de gauche, de droite et de dessus).



de recherche. Ce sont des preuves hétérodoxes certes, qu'on pourrait transformer en preuves formelles très longues (car le contexte est discret et se réduit à l'arithmétique), mais personne n'en ressent la moindre nécessité. Ce sont les preuves dont ce domaine mathématique a besoin, et aucun autre type de preuves n'établira mieux le résultat qu'il existe une configuration de dix cellules qui croît indéfiniment.

Une autre démonstration par énumération (menée par ordinateur, bien sûr) a établi qu'il n'existe aucune configuration de neuf cellules ou moins qui croît indéfiniment : la configuration à dix cellules de P. Calahan est donc la plus petite possible ayant cette propriété.

Le résultat cité paraîtra un peu anecdotique, mais ce n'est pas toujours le cas. La meilleure preuve du théorème de John von Neumann qu'il existe des configurations autoreproductrices fonctionnant sur un schéma génétique (voir l'article de cette rubrique de janvier 2012) est de cette nature. La conviction profonde que doit donner une démonstration peut dans ce cas soit provenir de la lecture attentive du texte de von Neumann (c'est un gros effort), soit provenir de l'observation du calcul réalisé par le programme qui fait fonctionner sa fameuse configuration, programme dont bien sûr on s'assurera qu'il fait ce qu'on attend et rien d'autre. Les preuves par observation du fonctionnement d'un programme pourraient bien jouer un rôle important dans l'avenir des mathématiques.

Confier le calcul à un ordinateur

Nous n'insisterons pas sur les preuves obtenues par l'usage d'un ordinateur qui réalise un calcul (qu'on n'observe pas directement comme précédemment). Depuis plusieurs dizaines d'années, leur usage s'étend lentement et on leur doit maintenant des théorèmes importants. Signalons un très bel exemple tout récent. En janvier de cette année, après plus de cinq ans de travail, le théorème fondamental du sudoku a été démontré : une grille de sudoku 9×9 doit comporter 17 chiffres préinscrits ou plus pour avoir une solution unique.

Le résultat m'a été signalé par son auteur Gary McGuire, de l'*University College* de Dublin, qui, pour son énorme calcul, a été aidé de Bastian Tuguean et Gilles Civario. Précisons qu'il y a peu de temps, ce calcul était jugé infaisable et qu'il n'a pu être mené que parce qu'il a été préalablement simplifié par une étude mathématique utilisant certains outils combinatoires, dont le lemme de Burnside.

Les tentatives mathématiques directes (sans ordinateurs) pour traiter le problème réussissent à montrer assez facilement que sept données sont nécessaires, mais ne vont pas plus loin pour l'instant. On est donc très loin du 17 obtenu avec l'ordinateur et qui apparaît totalement hors de portée du pur raisonnement non assisté par une machine. La preuve par ordinateur a exigé un calcul équivalent à plus de sept millions d'heures (environ 800 ans) d'un bon processeur d'ordinateur de bureau. L'examen du programme, des résultats mathématiques sur lesquels il se fonde, des contrôles assurant que tout se déroule bien et du résultat qu'il produit, constituent un ensemble de données communicables qu'il faut considérer comme une preuve rigoureuse au sens de Thom.

La liste des démonstrations hétérodoxes contient d'autres catégories encore, que je cite brièvement sans donner d'exemples : à l'inverse de la conception formaliste, elles incitent à une vision libre et ouverte de l'activité mathématique.

– Les preuves sans transfert de connaissance. En dialoguant avec la personne qui détient la preuve, vous serez persuadé que l'affirmation mathématique est juste, mais vous n'apprenez rien de la preuve et vous restez donc incapable d'en convaincre quelqu'un d'autre (voir l'article de cette rubrique de janvier 2011).

– Les preuves probabilistes : même si la preuve aboutit, il reste une probabilité (que l'on tentera de rendre aussi faible que possible) pour que le résultat prouvé soit faux.

– Les preuves holographiques (ou PCP) : vérifier la preuve (avec un risque très faible de se tromper) n'exige qu'un petit morceau de la preuve.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

G. McGuire, *There is no 16-clue Sudoku*, 2012 : <http://www.math.ie/checker.html>

R. Nelsen, *Proof without words*, The Mathematical Association of America, vol. I 1993, vol. II 2000, version française à paraître aux éditions Hermann, 2012.

J.-P. Delahaye, *Persuader de son savoir sans le transmettre*, *Pour la Science* n° 399, janvier 2011.

J.-P. Delahaye, *Du rêve à la réalité des preuves*, *Pour la Science* n° 402, avril 2011.

J.-P. Delahaye, *Quand la physique démontre des théorèmes mathématiques*, *Pour la Science* n° 388, février 2010.

C. Alsina et R. Nelsen, *Visualizing Basic Identities*, The Mathematical Association of America, 2009.

M. Levi, *The Mathematical Mechanic*, Princeton University Press, 2009.

C. Alsina et R. Nelsen, *Math Made Visual*, The Mathematical Association of America, 2006.