

4. Le paradoxe des files lentes et rapides

Une section d'autoroute d'une longueur de 18 km possède deux voies R et L. À cause de trous dans la chaussée (par exemple), la voie L est lente et la voie R est rapide. Les voitures n'ont pas le droit de changer de file sur cette section.

La voie L avance à 18 km/h (5 m/s). Les voitures sur la voie L sont séparées de 5 mètres et donc, en un point donné de la voie L, il passe une voiture chaque seconde. Une voiture engagée sur L y reste une heure avant d'arriver à l'extrémité de la section. À chaque instant, il y a 3 600 voitures sur la voie L.

La voie R avance à 72 km/h (20 m/s). Les voitures sur la voie R sont espacées de 10 mètres et donc en un point donné de la voie R, il passe deux voitures par seconde. Une voiture engagée sur R y reste 15 minutes. À chaque instant, il y a 1 800 voitures sur la voie R. Une voiture sur la voie R double trois voitures de la voie L par seconde et une voiture sur la voie L est doublée trois fois toutes les deux secondes.

Je suis sur cette autoroute, il se produit un dépassement ; quelle est la probabilité P_1 que je sois celui qui double ? Quelle est la proba-

bilité P_2 que je sois celui qui est doublé ?

Raisonnement 1

À chaque dépassement, il y a une voiture dépassée et une voiture qui dépasse : j'ai donc autant de chance d'être dans l'une ou l'autre. La réponse est $P_1 = P_2 = 1/2$.

Raisonnement 2

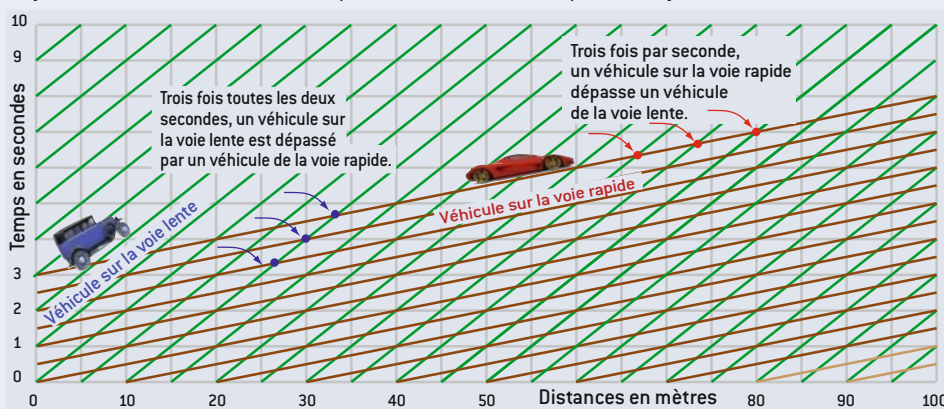
Sur les 18 kilomètres de la section d'autoroute, il y a 3 600 voitures lentes et 1 800 voitures rapides. J'ai donc deux chances sur trois d'être dans une voiture lente et une chance sur trois d'être dans une voiture rapide. Si je suis dans une voiture lente, au

prochain dépassement, je serai dépassé, si je suis dans une voiture rapide, je dépasserai. Les réponses sont donc $P_1 = 1/3$ et $P_2 = 2/3$.

Raisonnement 3

À l'entrée de la section, il passe une voiture lente par seconde, et deux voitures rapides par seconde (c'est le cas en fait en chaque point du tronçon). En me présentant à l'entrée de l'autoroute, si je ne sais pas quelle est la voie rapide et la voie lente, et que les voitures se disposent au hasard, je serai 2 fois plus souvent sur la voie rapide que sur la voie lente (elle absorbe deux fois moins de véhicules). Quand j'emprunte cette section d'autoroute, je suis donc deux fois sur trois dans une voiture qui dépasse et une fois sur trois dans une voiture qui est dépassée. Les réponses sont donc $P_1 = 2/3$ et $P_2 = 1/3$.

C'est ennuyeux ! les trois calculs parfaitement rigoureux aboutissent à trois conclusions différentes ! Comment expliquer ce qui apparaît comme une absurdité totale ? (La solution du paradoxe est donnée dans le texte principal.)



avance réellement moins vite que sa ou ses voisines. Si vous êtes pris dans une telle file, il devient rationnel d'en changer. L'illusion de la file lente existe, oui, mais les vraies files lentes aussi !

La situation créée par ces files avançant à des vitesses différentes est délicate à traiter du point de vue des statistiques. Plusieurs effets de sélection et de perspective s'y produisent et perturbent les évaluations des probabilités quand nous voulons répondre à la question : ai-je de la chance, oui ou non ?

Il y a trois raisonnements possibles (voir la figure 4). Le premier est qu'à chaque dépassement, il y a une voiture dépassée et une voiture qui dépasse. Quand il y a un dépassement, j'ai donc une chance sur deux d'être dépassé ou de dépasser.

Le deuxième est que si l'une des files avance plus vite, les véhicules y seront

plus espacés que dans la file lente où les voitures s'agglomèrent. Sur la section d'autoroute, il y aura donc plus de voitures dans la file lente que dans la file rapide et en moyenne nous nous trouverons plus fréquemment dans la file lente (dont l'effectif est plus grand) que dans la file rapide (comportant moins de véhicules). Si toutes les files ne vont pas à la même vitesse, le sentiment de ne pas avoir de chance est donc fondé objectivement : d'après ce deuxième raisonnement, on se retrouve vraiment plus souvent dans la mauvaise file. Remarquons que cette conclusion contredit la conclusion du premier raisonnement... mais ce n'est pas fini.

Un troisième raisonnement est encore possible. Les files rapides, même si les véhicules y sont moins serrés, ont des débits plus importants que les files lentes (souvent presque immobilisées) : il y passe un

plus grand nombre de voitures par seconde, car elles ne se gênent pas mutuellement (un bouchon diminue le débit de voitures). Il en résulte que parmi toutes les voitures qui s'engagent dans une section où il y a une file lente et une file rapide et que personne ne change de file, il y a plus de voitures qui empruntent la file rapide que de voitures qui empruntent la file lente. Celui qui, à l'entrée de la section, choisit au hasard une file se trouvera plus fréquemment dans la file rapide que dans la file lente.

Trois raisonnements donnent trois conclusions différentes ! Sur la figure 4, avec des chiffres précis, la probabilité d'être dans la file rapide est égale, selon les raisonnements, à $1/2$, $1/3$ ou $2/3$, ce qui bien sûr est paradoxal. Comment s'en sortir ?

La situation est analogue à celle du paradoxe de Bertrand où l'on s'interroge sur la pro-

tabilité que la longueur d'une corde tirée au hasard sur un cercle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle (voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Bertrand).

Les trois raisonnements calculent trois probabilités qui, contrairement aux apparences, ne correspondent pas à la même question. En effet, il n'est pas équivalent :

- de choisir au hasard une voiture en train d'être dépassée ou de dépasser (raisonnement 1) ;

- de choisir une voiture au hasard à un instant donné sur la section d'autoroute, et de s'interroger pour savoir si, lors du prochain dépassement, elle dépassera ou sera dépassée (raisonnement 2).

Et ces deux questions sont différentes de celle qu'on se pose avant d'arriver sur la section d'autoroute : vais-je avoir de la chance et me retrouver sur la voie rapide ? (raisonnement 3).

Se poser la bonne question

Sachant cela, le problème devient : quelle question le conducteur doit-il se poser pour savoir s'il a de la chance ou pas ? Il me semble que c'est la troisième question, celle qui aboutit à la réponse la plus positive nous indiquant qu'on sera dans la bonne file plus d'une fois sur deux.

Cette conclusion semble contraire au sentiment de malchance persistante ressentie dans les embouteillages, mais l'explication de ce sentiment est simple et nous ramène à la première partie de l'article. Pour les raisons identifiées, quand les files ont des vitesses équivalentes, nous croyons avoir moins de chances que nous devrions en avoir. Lorsque les files ont des vitesses différentes, les mêmes biais de mémorisation se produisent pour des raisons de même nature, et pour une raison supplémentaire qui n'a pas encore été évoquée. Quand nous sommes sur la voie la plus rapide, nous en sortons vite et oublions aussitôt que nous venons d'avoir de la chance !

En clair, et dans notre vie à propos de bien d'autres choses que les encombrements de circulation, nous considérons normal d'avoir de la chance et nous ne nous en

réjouissons pas comme nous le devrions (ce que les probabilités nous permettent d'analyser), alors que nous trouvons injustes les désagréments qu'un peu de malchance provoque et cela surtout lorsque le désagrément est plus long que la satisfaction.

Changer de file ?

La réponse est assez claire, ce qui ne veut pas dire facile à appliquer.

- Si vous pensez que la file d'à côté avance plus vite que la vôtre, effectuez un contrôle aussi objectif que possible de votre jugement (il se peut que vous soyez victime de l'illusion de la file voisine).

- Si vous concluez que la file voisine est vraiment meilleure, alors il sera intéressant de changer de file.

Cependant, n'oubliez pas que vous prenez un risque d'accident en changeant de file et qu'il faut l'intégrer à votre calcul. Cette prise en compte pourrait en effet en changer la conclusion, comme le montre une étude récente de D. Redelmeier (décidément soucieux de circulation routière).

Les résultats publiés dans la revue *Medical Decision Making* sont troublants, ils résultent de calculs menés à partir des statistiques de mortalité dans les accidents et des données de circulations routières. Ils indiquent que :

- une heure passée à conduire une voiture diminue l'espérance de vie de 20 minutes (du fait qu'on prend un risque d'accident mortel) ;

- une augmentation de vitesse d'un kilomètre par heure entraîne pour un conducteur moyen, une perte de temps de 26 secondes, car le gain de temps obtenu par la vitesse accrue est plus que compensé par la diminution d'espérance de vie résultant de l'augmentation du risque d'accident.

- une diminution de vitesse de trois kilomètres par heure est ce qui produit pour le conducteur moyen le meilleur gain de temps total (différence entre le temps perdu immédiatement par la vitesse moindre, et la prolongation de l'espérance de vie due à la diminution du risque d'accident pour celui qui ralentit). Des calculs à méditer, là encore !

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

P. Barthélémy, *L'autre file avance-t-elle vraiment plus vite ?*, *Le Monde*, 19 novembre 2011.

D. Redelmeier et A. Bayoumi, *Time lost by driving fast in the United States*, *Medical Decision Making*, vol. 30(3), pp. E12-E19, 2010.

B. Dawson et T. Riggs, *Highway relativity*, *The College Mathematics Journal*, vol. 35(4), pp. 246-250, 2004.

L. Clevenson *et al.*, *The average speed on the highway*, *The College Mathematics Journal*, vol. 32(3), pp. 169-171, 2001.

D. Redelmeier et R. Tibshirani, *Are those other drivers really going faster ?* *Chance*, vol. 13(3), pp. 8-14, 2000.

N. Bostrom, *Cars in the next lane really do go faster*, *Plus*, nov. 2001 (<http://plus.maths.org/content/os/issue17/features/traffic/index>).

D. Redelmeier et R. Tibshirani, *Why cars in the next lane seem to go faster ?*, *Nature*, vol. 401, p. 35, 1999.