

LOGIQUE & CALCUL

L'accrochage des tableaux

Comment accrocher un tableau avec n clous et une ficelle, de façon à ce qu'en enlevant n'importe lequel des clous, le tableau soit libéré et glisse vers le sol ?

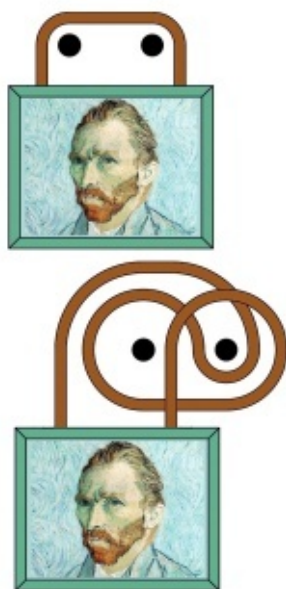
Jean-Paul DELAHAYE

Plantez deux clous. Accrochez à ces deux clous un tableau de la façon la plus simple et la plus naturelle. Si l'un des clous tombe, la corde (et donc le tableau) reste accrochée à l'autre (voir la figure du haut ci-contre). Il va donc de soi (pour un mathématicien...) de se demander : est-il possible de disposer la corde autour des deux clous de façon que, si l'un quelconque des deux clous disparaît, le tableau tombe ? Nous nommerons ce montage *Podger*, en hommage à l'illustre accrocheur de tableau de Jerome K. Jerome qui faisait toujours tomber son tableau (voir l'encadré 3). Ce problème est analogue à un montage de type *fail-safe* dans l'industrie : si un organe est défaillant, l'ensemble de la machine s'arrête.

Une équipe aux États-Unis a étudié ce problème d'accrochage de tableau, à la frontière des mathématiques récréatives, de la topologie algébrique et de l'algorithmique. Elle est composée de Erik Demaine, Martin Demaine et Ronald Rivest (le R du système de cryptage RSA) du MIT, Yair Minsky, de l'Université de Yale, Joseph Mitchell, de l'Université Stony Brook, et Mihai Patrascu, des Laboratoires ATT de Florham Park.

La première mention de l'énigme de l'accrochage d'un tableau remonte à 1997. Elle est le fait de A. Spivak qui posa son casse-tête dans la revue *Quantum* consacrée aux divertissements mathématiques. Depuis, un grand nombre de variantes du petit problème ont imposé la mise au point d'outils généraux que les mathématiciens ont su découvrir, ce qui les a conduites à de beaux théorèmes... pas tous faciles !

Pour vous persuader qu'en enlevant un seul des deux clous, le tableau sera libéré et glissera jusqu'au sol, observez la figure du bas ci-dessous ou faites l'essai avec une ficelle. On peut trouver cette solution par tâtonnements. Il existe cependant une méthode qui conduit sans hésitation à la solution et à la solution de la généralisation suivante que nous nommons *Le problème des n clous* : « Disposer la corde de soutien du tableau autour de n clous



de façon que si l'un quelconque des n clous disparaît, la pesanteur fasse glisser le tableau en le libérant des clous restants. »

Avant de lire la suite, vous pouvez rechercher la solution avec trois clous, puis quatre, etc., et imaginer un procédé pour n clous. Résoudre la question comme un exercice de travail manuel conduit à des difficultés,

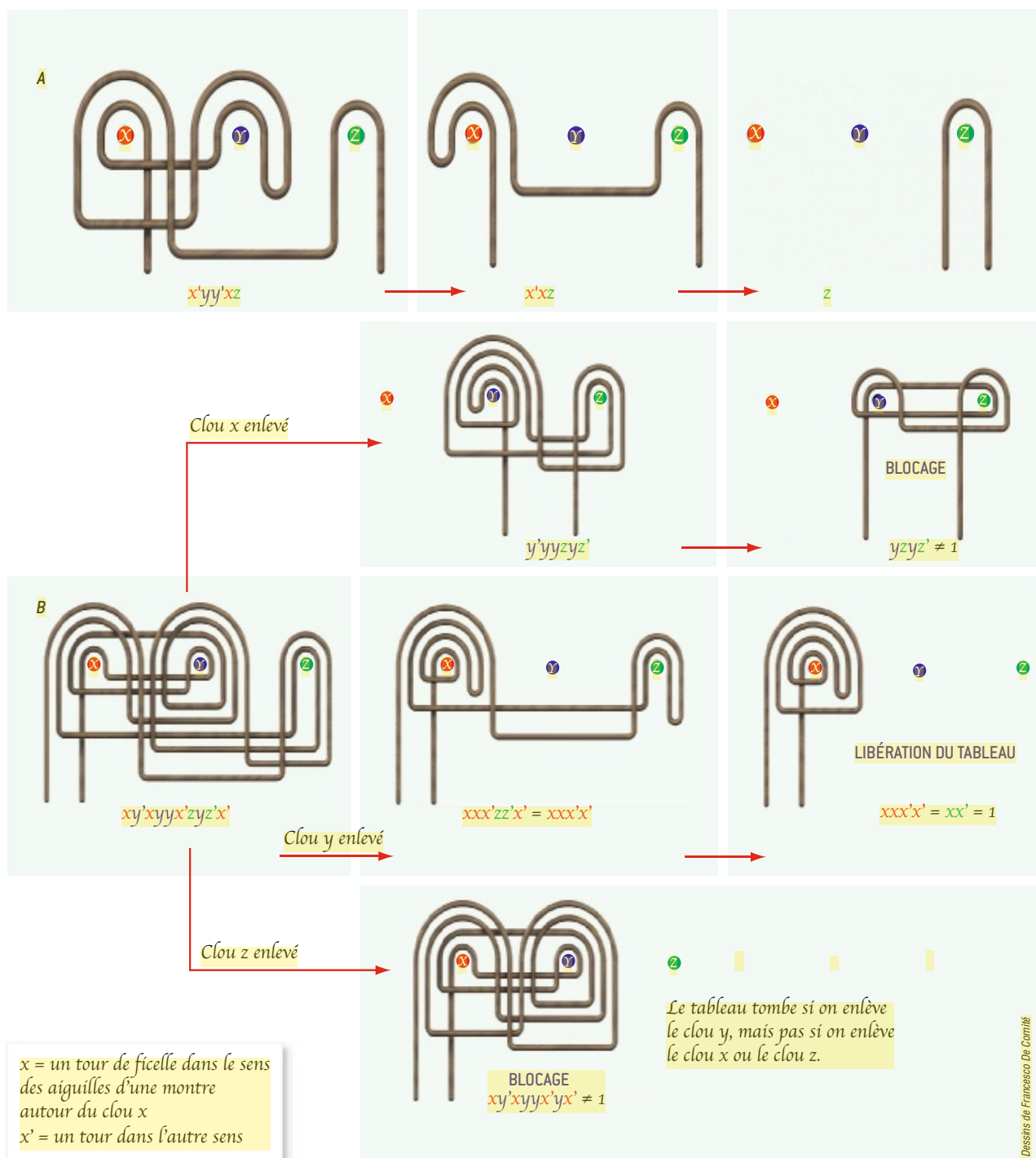
dues à la curieuse propension qu'ont les ficelles à faire des nœuds. Tester des trajets de la ficelle pour en découvrir qui ont la propriété recherchée demande une grande longueur de ficelle et beaucoup de patience. L'étude deviendra impossible quand vous envisagerez plus de quatre clous.

Heureusement, l'algèbre va nous secourir. L'idée, due à Neil Fitzgerald, d'un rapport entre le problème des n clous et la manipulation des expressions représentant des éléments du « groupe libre » (nous préciserons ce que c'est) permet de se poser d'autres questions et de les résoudre (voir l'encadré 4).

Le groupe libre à l'aide

Le groupe libre de générateurs G est un système de calcul utile dans plusieurs domaines mathématiques, en particulier en topologie algébrique, la discipline mathématique qui, au moyen de l'algèbre, classe les nœuds et les surfaces. L'ensemble G des générateurs est, par exemple, constitué de trois éléments x, y et z ; on associe à chaque générateur un double x', y', z' . Leur ensemble est noté G' . On convient alors que toute expression composée d'une suite finie de symboles pris dans G ou dans G' désigne un élément du groupe libre. La suite vide, composée de zéro élément, se note 1 et, bien évidemment, $1s = s1 = s$ pour tout élément s du groupe libre.

Deux exemples d'éléments du groupe libre de générateurs x, y, z sont $s = xyxx'y'z'z$ et $r = zzzzyx'xy'z'$. Les expressions ainsi construites se simplifient parfois, mais la seule et unique façon de le faire est, par



1. SIMPLIFICATION DES PARCOURS DE FICELLE. Le parcours $x'y'y'xz$ (A) se simplifie en $x'xz$, puis en z , ce qui signifie qu'en tirant sur la ficelle placée pour suivre le parcours $x'y'y'xz$, on obtient le parcours z . Quand la formule associée à un parcours se simplifie totalement, un tableau accroché avec une ficelle suivant ce parcours tombe quand on tire sur la ficelle. Voyons l'effet de l'élimination d'un clou sur le parcours de ficelle $xy'xyyx'zyz'x'$ (B). Pour déterminer

l'effet de l'élimination du clou y , on retire tous les y et y' de la formule du parcours et on simplifie. Ici, $xy'xyyx'zyz'x'$ donne $xxx'zz'x'$, qui donne $xxx'x'$, puis xx' , puis 1 . Si on enlève le clou y , le tableau tombe, mais si on enlève le clou x , le tableau reste accroché : l'élimination des x donne $y'yzyz'$ qui se simplifie en $yzyz'$, qui ne se simplifie plus. Si on enlève le clou z , le parcours $xy'xyyx'zyz'x'$ donne $xy'xyyx'yx'$ qui ne se simplifie plus : le tableau reste accroché.

définition du groupe libre, de repérer une lettre et son double côté à côté et de les supprimer : $xx' = x'x = 1$.

Lorsqu'on a ainsi supprimé une paire de symboles, il se peut qu'en apparaisse une autre du même type qu'on simplifiera à nouveau, etc. Par exemple, $xy'xx'y'z'z = xy'y'z'z = xz'z = x$. On a d'abord simplifié xx' , puis $y'y'$, et enfin $z'z$. L'élément du groupe libre, même s'il semblait plus compliqué, était en fait x .

Toute suite de symboles pris dans G et G' désigne un élément du groupe libre de générateurs G . Lorsqu'il n'existe plus aucune simplification possible, l'élément est dit « sous sa forme canonique ». Si deux éléments n'ont pas la même forme canonique, ils sont considérés différents. Notons que l'on n'est pas autorisé à permuter les symboles présents dans une expression : dans le groupe libre à deux générateurs x et y , l'élément xy n'est pas égal à yx .

Un parcours de ficelle pour chaque formule

La mise en relation des figures faites d'une ficelle passant autour de clous plantés dans un mur avec les éléments du groupe libre est l'outil idéal pour résoudre les problèmes d'accrochage de tableaux. Pour ce faire, on associe un générateur à chaque clou planté dans le mur. S'il y a trois clous, on choisit par exemple de les noter x , y et z .

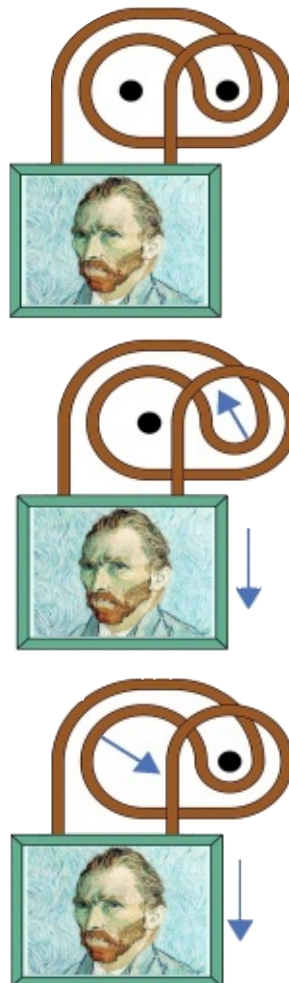
Chaque parcours d'une ficelle autour des clous est associé à un élément du groupe libre, c'est-à-dire à une suite de symboles x , y , z , x' , y' , z' de la manière suivante. On suit le trajet de la ficelle d'une extrémité à l'autre. À chaque fois qu'elle fait le tour du clou x dans le sens des aiguilles d'une montre, on écrit un x ; à chaque fois qu'elle fait le tour du clou x dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on écrit un x' . On procède de même pour les clous y et z .

De cette façon, à chaque élément du groupe libre se trouve associé un parcours de la ficelle autour des clous, et réciproquement. L'opération de simplification $xx' = x'x = 1$ correspond à l'idée que si la ficelle tourne autour du clou x dans le sens des aiguilles d'une montre, puis immédiatement après autour de x dans le sens

inverse, alors en tendant la ficelle (sans déplacer ou enlever de clou), le parcours de la ficelle se simplifie et fait disparaître xx' .

Grâce au groupe libre et aux simplifications opérées, on saura si un tableau va tenir quand on l'accroche à une série de clous en faisant faire à la ficelle un parcours, aussi compliqué soit-il, autour des clous.

On suit le parcours de la ficelle en écrivant sa formule, une suite de symboles x , y , z , ..., x' , y' , z' , ... On simplifie l'expression en faisant disparaître autant que c'est possible les xx' , $x'x$, yy' , $y'y$, zz' , $z'z$, etc. S'il ne reste plus rien à la fin du calcul, c'est que le tableau tombera (c'est un montage *Podger*) ; s'il reste quelque chose d'impossible à simplifier, c'est que le tableau restera accroché. Les lettres présentes dans la formule simplifiée indiquent les clous qui porteront le tableau.



Nous sommes maintenant armés pour transformer le problème général à n clous en un petit problème algébrique que nous pourrions traiter sans emmêler de ficelles.

Le montage Podger

Si l'on a un parcours autour de trois clous x , y et z , par exemple $xy'xy'yz'yz'x'$ et qu'on enlève un clou, par exemple y , comment savoir si le tableau glisse au sol ?

C'est très simple : il suffit de retirer tous les y et y' de l'expression algébrique du parcours de la ficelle, et de simplifier ce qui reste autant que possible (voir l'encadré 1). Le problème des n clous est maintenant devenu purement symbolique. Il consiste à trouver une expression s (un élément du groupe libre de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_n$) telle qu'elle ne se simplifie pas en 1 (il ne faut pas que le tableau tombe au sol quand tous les clous sont présents) et qui se simplifie en 1 quand on enlève l'un des clous, x_1 , ou x_2 , ..., ou x_n .

Il devient immédiat que la solution la plus courte au problème des deux clous comporte quatre symboles : $xy'x'y'$ (ou $xy'x'y$, ou $x'y'xy$, ou $x'y'xy$, ou $yx'y'x'$, ou $y'x'y'x$, ou $y'x'y'x$).

L'expression ne se simplifie pas et l'on voit que la suppression du clou x donne 1, de même que la suppression du clou y (voir le dessin ci-contre). Il existe une infinité d'autres solutions au problème des deux clous dont voici l'une d'elles, $xy'yx'y'x'y'y'$, qui est bien sûr inutilement compliquée.

Grâce à sa traduction algébrique, par tâtonnements – j'ai réellement procédé ainsi ! – on trouve assez vite une solution au problème des trois clous. Je suis tombé sur celle-ci : $x'y'zy'xy'x'z'x'y$. Vérifions-la.

Suppression du clou x :

$$y'zy'zy'y = y'zy'y = y'y = 1.$$

Suppression du clou y :

$$x'zx'x'z'x = x'z'z'x = x'x = 1.$$

Suppression du clou z :

$$x'y'y'xy'x'xy = x'x'y'x'xy = x'x'y'y = x'x = 1.$$

Examinons maintenant le problème avec n clous. Pour le résoudre, voici une méthode générale qui fonctionne de proche en proche. On imagine qu'on dispose d'une solution pour le problème à n clous, et on en construit une pour le problème à $n + 1$ clous. Comme