

définition du groupe libre, de repérer une lettre et son double côté à côté et de les supprimer : $xx' = x'x = 1$.

Lorsqu'on a ainsi supprimé une paire de symboles, il se peut qu'en apparaisse une autre du même type qu'on simplifiera à nouveau, etc. Par exemple, $xy'xx'y'z'z = xy'y'z'z = xz'z = x$. On a d'abord simplifié xx' , puis $y'y'$, et enfin $z'z$. L'élément du groupe libre, même s'il semblait plus compliqué, était en fait x .

Toute suite de symboles pris dans G et G' désigne un élément du groupe libre de générateurs G . Lorsqu'il n'existe plus aucune simplification possible, l'élément est dit « sous sa forme canonique ». Si deux éléments n'ont pas la même forme canonique, ils sont considérés différents. Notons que l'on n'est pas autorisé à permuter les symboles présents dans une expression : dans le groupe libre à deux générateurs x et y , l'élément xy n'est pas égal à yx .

Un parcours de ficelle pour chaque formule

La mise en relation des figures faites d'une ficelle passant autour de clous plantés dans un mur avec les éléments du groupe libre est l'outil idéal pour résoudre les problèmes d'accrochage de tableaux. Pour ce faire, on associe un générateur à chaque clou planté dans le mur. S'il y a trois clous, on choisit par exemple de les noter x , y et z .

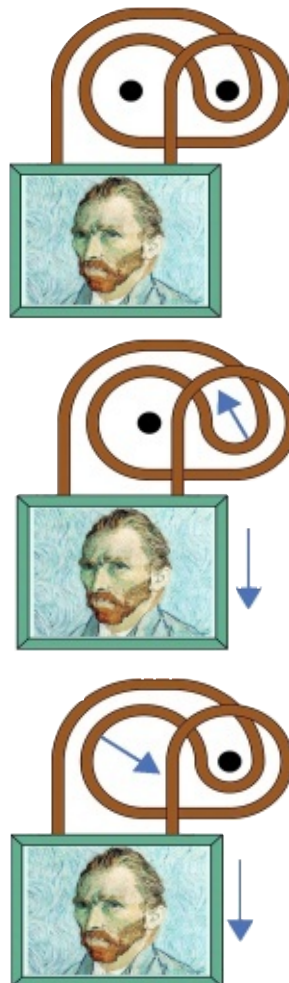
Chaque parcours d'une ficelle autour des clous est associé à un élément du groupe libre, c'est-à-dire à une suite de symboles x , y , z , x' , y' , z' de la manière suivante. On suit le trajet de la ficelle d'une extrémité à l'autre. À chaque fois qu'elle fait le tour du clou x dans le sens des aiguilles d'une montre, on écrit un x ; à chaque fois qu'elle fait le tour du clou x dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on écrit un x' . On procède de même pour les clous y et z .

De cette façon, à chaque élément du groupe libre se trouve associé un parcours de la ficelle autour des clous, et réciproquement. L'opération de simplification $xx' = x'x = 1$ correspond à l'idée que si la ficelle tourne autour du clou x dans le sens des aiguilles d'une montre, puis immédiatement après autour de x dans le sens

inverse, alors en tendant la ficelle (sans déplacer ou enlever de clou), le parcours de la ficelle se simplifie et fait disparaître xx' .

Grâce au groupe libre et aux simplifications opérées, on saura si un tableau va tenir quand on l'accroche à une série de clous en faisant faire à la ficelle un parcours, aussi compliqué soit-il, autour des clous.

On suit le parcours de la ficelle en écrivant sa formule, une suite de symboles x , y , z , ..., x' , y' , z' , ... On simplifie l'expression en faisant disparaître autant que c'est possible les xx' , $x'x$, yy' , $y'y'$, zz' , $z'z$, etc. S'il ne reste plus rien à la fin du calcul, c'est que le tableau tombera (c'est un montage *Podger*) ; s'il reste quelque chose d'impossible à simplifier, c'est que le tableau restera accroché. Les lettres présentes dans la formule simplifiée indiquent les clous qui porteront le tableau.



Nous sommes maintenant armés pour transformer le problème général à n clous en un petit problème algébrique que nous pourrions traiter sans emmêler de ficelles.

Le montage Podger

Si l'on a un parcours autour de trois clous x , y et z , par exemple $xy'xy'yz'yz'x'$ et qu'on enlève un clou, par exemple y , comment savoir si le tableau glisse au sol ?

C'est très simple : il suffit de retirer tous les y et y' de l'expression algébrique du parcours de la ficelle, et de simplifier ce qui reste autant que possible (voir l'encadré 1). Le problème des n clous est maintenant devenu purement symbolique. Il consiste à trouver une expression s (un élément du groupe libre de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_n$) telle qu'elle ne se simplifie pas en 1 (il ne faut pas que le tableau tombe au sol quand tous les clous sont présents) et qui se simplifie en 1 quand on enlève l'un des clous, x_1 , ou x_2 , ..., ou x_n .

Il devient immédiat que la solution la plus courte au problème des deux clous comporte quatre symboles : $xy'xy'$ (ou $xy'x'y$, ou $x'yxy'$, ou $x'y'xy$, ou $yxxy'$, ou $y'xyx$, ou $y'xy'x$, ou $y'x'yx$).

L'expression ne se simplifie pas et l'on voit que la suppression du clou x donne 1, de même que la suppression du clou y (voir le dessin ci-contre). Il existe une infinité d'autres solutions au problème des deux clous dont voici l'une d'elles, $xy'yx'yx'y'y'y'$, qui est bien sûr inutilement compliquée.

Grâce à sa traduction algébrique, par tâtonnements – j'ai réellement procédé ainsi ! – on trouve assez vite une solution au problème des trois clous. Je suis tombé sur celle-ci : $x'y'zy'xy'x'z'x'y$. Vérifions-la.

Suppression du clou x :

$$y'zy'zy'y = y'zy'zy'y = y'y = 1.$$

Suppression du clou y :

$$x'zx'x'z'x = x'z'z'x = x'x = 1.$$

Suppression du clou z :

$$x'y'yxy'x'xy = x'x'y'x'xy = x'xy'y = x'x = 1.$$

Examinons maintenant le problème avec n clous. Pour le résoudre, voici une méthode générale qui fonctionne de proche en proche. On imagine qu'on dispose d'une solution pour le problème à n clous, et on en construit une pour le problème à $n + 1$ clous. Comme