

on en connaît une pour le problème à 2 clous, on pourra amorcer la construction et résoudre petit à petit le problème pour 3, 4, ..., n clous.

Soit s une solution au problème avec n clous. Notons s' la suite qui annule $s : s s' = 1$ (s' est l'« inverse » de s). C'est la suite de symboles qu'on obtient en inversant l'ordre des éléments de s , en ajoutant un « ' » sur les lettres qui n'en ont pas et en supprimant le « ' » de celles qui en ont (par exemple : $(x y z' x' y)' = y' x z y' x'$). Si z se réfère au $(n+1)$ -ième clou, alors la suite $s z s' z'$ sera une solution du problème pour $n+1$ clous. La formule permet de passer d'une solution pour n clous à une solution pour $n+1$ clous.

En effet, si on enlève une lettre parmi les n premières, s devient 1 (car c'est une solution pour n clous), de même que s' . Il ne reste alors que $z z'$, qui se simplifie en 1. Si on enlève les z , alors $s z s' z'$ devient $s s'$ qui devient 1 aussi. Chaque suppression d'un clou fait donc tomber le tableau au sol. C'est le montage *Podger* que nous voulions.

Appliquons cette méthode pour trouver la solution du problème des trois clous à partir de la solution du problème à deux clous $S_2 = x y x' y'$. On a $S_2' = y x y' x'$, et donc : $S_3 = S_2 z S_2' z' = x y x' y' z y x y' x' z'$. Ce n'est pas celle que nous avons trouvée par tâtonnements, mais elle a la même longueur. La méthode décrite donne une solution au problème des trois clous (et plus généralement au problème des n clous). Cela n'interdit pas bien sûr l'existence d'autres solutions.

Une ficelle à tout faire

De la même façon, on obtient la solution du problème des quatre clous à partir de celle pour trois clous : $S_4 = S_3 t S_3' t' = x y x' y' z y x y' x' z' t z x y x' y' z' y x y' x' t'$. Une multitude d'autres problèmes d'accrochage sont envisageables (voir l'encadré 4). Il se trouve que l'équipe de chercheurs américains a réussi l'exploit de démontrer que tout ce qu'il est envisageable de demander à une corde faisant tenir un tableau peut l'être. Voyons ce que cela signifie.

Imaginons que l'on souhaite accrocher le tableau à cinq clous x, y, z, t, u de façon qu'il tienne, mais que si on enlève les clous x et y , ou les clous x et z et t , ou les clous y et t

et u , alors il tombe, et dans aucun autre cas (c'est-à-dire quand x ou y restent, et que x ou z ou t restent, et y ou t ou u restent).

Est-ce possible ? Oui, les six chercheurs ont montré comment et leur résultat vaut pour tout problème du même type, c'est-à-dire pour toute disjonction de conjonctions (sans négation) : $(x_1 \text{ et } \dots \text{ et } x_i)$ ou $(y_1 \text{ et } \dots \text{ et } y_j)$ ou $\dots$ ou $(z_1 \text{ et } \dots \text{ et } z_k)$.

Par ailleurs, il est clair qu'on ne peut pas demander n'importe quoi. Il est par exemple impossible de disposer la ficelle pour que le tableau tombe si on enlève le clou x , mais pas si on enlève x et y . Cette condition, dite de monotonie, est en fait exactement celle qui assure qu'il y a une solution. Quand l'énoncé du problème est monotone (autrement dit pas absurde), le problème peut se réécrire comme une disjonction de conjonctions et admet donc une solution. En clair : tous les cas où l'on peut raisonnablement envisager qu'il y ait une solution sont effectivement des cas où il y a une solution, et on sait la trouver.

On n'a pas fait le tour complet des problèmes d'accrochage de tableaux. D'autres questions liées à la complexité des algorithmes à mettre en œuvre pour résoudre ces problèmes sont abordées. Certaines sont résolues et d'autres, comme c'est toujours le cas en mathématiques face à une problématique riche, sont encore ouvertes et attendent leur vainqueur. Voici deux des problèmes en attente de solution :

– La solution la plus courte (en nombre de symboles) pour traiter le problème des n clous (enlever un des clous fait tomber le tableau) compte-t-elle moins de n^2 symboles ?

– Une ficelle autour de clous soutenant un tableau étant donnée (par son parcours ou sa formule), existe-t-il un algorithme polynomial permettant de connaître le plus petit ensemble de clous qui libère le tableau ?

Lorsque vous visiterez la prochaine exposition de peinture contemporaine de tableaux monochromes (si, si, ça existe !) et que vous vous ennuierez un peu, pensez à ces problèmes qui rendent le dos des tableaux plus intéressants que leur face, et aux artistes mathématiciens qui y travaillent. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

E. Demaine et al., *Picture-Hanging Puzzles, Proceedings of the 6th International Conference on Fun with Algorithms FUN 2012*, Lecture Notes in Computer Science, Venice, Italy, June 4-6, 2012. [<http://arxiv.org/pdf/1203.3602v1.pdf>]

A. Spivak, *Brainteasers B 201 : Strange painting*, *Quantum*, page 13, mai-juin 1997.