

on en connaît une pour le problème à 2 clous, on pourra amorcer la construction et résoudre petit à petit le problème pour 3, 4, ..., n clous.

Soit s une solution au problème avec n clous. Notons s' la suite qui annule $s : s s' = 1$ (s' est l'« inverse » de s). C'est la suite de symboles qu'on obtient en inversant l'ordre des éléments de s , en ajoutant un « ' » sur les lettres qui n'en ont pas et en supprimant le « ' » de celles qui en ont (par exemple : $(x y z' x' y)' = y' x z y' x'$). Si z se réfère au $(n+1)$ -ième clou, alors la suite $s z s' z'$ sera une solution du problème pour $n+1$ clous. La formule permet de passer d'une solution pour n clous à une solution pour $n+1$ clous.

En effet, si on enlève une lettre parmi les n premières, s devient 1 (car c'est une solution pour n clous), de même que s' . Il ne reste alors que $z z'$, qui se simplifie en 1. Si on enlève les z , alors $s z s' z'$ devient $s s'$ qui devient 1 aussi. Chaque suppression d'un clou fait donc tomber le tableau au sol. C'est le montage *Podger* que nous voulions.

Appliquons cette méthode pour trouver la solution du problème des trois clous à partir de la solution du problème à deux clous $S_2 = x y x' y'$. On a $S_2' = y x y' x'$, et donc : $S_3 = S_2 z S_2' z' = x y x' y' z y x y' x' z'$. Ce n'est pas celle que nous avons trouvée par tâtonnements, mais elle a la même longueur. La méthode décrite donne une solution au problème des trois clous (et plus généralement au problème des n clous). Cela n'interdit pas bien sûr l'existence d'autres solutions.

Une ficelle à tout faire

De la même façon, on obtient la solution du problème des quatre clous à partir de celle pour trois clous : $S_4 = S_3 t S_3' t' = x y x' y' z y x y' x' z' t z x y x' y' z' y x y' x' t'$. Une multitude d'autres problèmes d'accrochage sont envisageables (voir l'encadré 4). Il se trouve que l'équipe de chercheurs américains a réussi l'exploit de démontrer que tout ce qu'il est envisageable de demander à une corde faisant tenir un tableau peut l'être. Voyons ce que cela signifie.

Imaginons que l'on souhaite accrocher le tableau à cinq clous x, y, z, t, u de façon qu'il tienne, mais que si on enlève les clous x et y , ou les clous x et z et t , ou les clous y et t

et u , alors il tombe, et dans aucun autre cas (c'est-à-dire quand x ou y restent, et que x ou z ou t restent, et y ou t ou u restent).

Est-ce possible ? Oui, les six chercheurs ont montré comment et leur résultat vaut pour tout problème du même type, c'est-à-dire pour toute disjonction de conjonctions (sans négation) : $(x_1 \text{ et } \dots \text{ et } x_i)$ ou $(y_1 \text{ et } \dots \text{ et } y_j)$ ou $\dots$ ou $(z_1 \text{ et } \dots \text{ et } z_k)$.

Par ailleurs, il est clair qu'on ne peut pas demander n'importe quoi. Il est par exemple impossible de disposer la ficelle pour que le tableau tombe si on enlève le clou x , mais pas si on enlève x et y . Cette condition, dite de monotonie, est en fait exactement celle qui assure qu'il y a une solution. Quand l'énoncé du problème est monotone (autrement dit pas absurde), le problème peut se réécrire comme une disjonction de conjonctions et admet donc une solution. En clair : tous les cas où l'on peut raisonnablement envisager qu'il y ait une solution sont effectivement des cas où il y a une solution, et on sait la trouver.

On n'a pas fait le tour complet des problèmes d'accrochage de tableaux. D'autres questions liées à la complexité des algorithmes à mettre en œuvre pour résoudre ces problèmes sont abordées. Certaines sont résolues et d'autres, comme c'est toujours le cas en mathématiques face à une problématique riche, sont encore ouvertes et attendent leur vainqueur. Voici deux des problèmes en attente de solution :

– La solution la plus courte (en nombre de symboles) pour traiter le problème des n clous (enlever un des clous fait tomber le tableau) compte-t-elle moins de n^2 symboles ?

– Une ficelle autour de clous soutenant un tableau étant donnée (par son parcours ou sa formule), existe-t-il un algorithme polynomial permettant de connaître le plus petit ensemble de clous qui libère le tableau ?

Lorsque vous visiterez la prochaine exposition de peinture contemporaine de tableaux monochromes (si, si, ça existe !) et que vous vous ennuierez un peu, pensez à ces problèmes qui rendent le dos des tableaux plus intéressants que leur face, et aux artistes mathématiciens qui y travaillent. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

E. Demaine et al., *Picture-Hanging Puzzles*, *Proceedings of the 6th International Conference on Fun with Algorithms FUN 2012*, Lecture Notes in Computer Science, Venice, Italy, June 4-6, 2012. [<http://arxiv.org/pdf/1203.3602v1.pdf>]

A. Spivak, *Brainteasers B 201 : Strange painting*, *Quantum*, page 13, mai-juin 1997.

 ART & SCIENCE

Van Gogh et les tournesols mutants

Certains des tournesols peints par Van Gogh à Arles ressemblent à des pompons. Des généticiens viennent d'élucider les mécanismes qui expliquent cet aspect.

Loïc MANGIN

Je suis en train de peindre avec l'entrain d'un Marseillais mangeant la bouillabaisse, ce qui ne t'étonnera pas, lorsqu'il s'agit de peindre des grands tournesols.

Van Gogh, *Lettres à Théo*.

Le 20 février 1888, Vincent Van Gogh (1853-1890) s'installe à Arles. En août de cette année, il peint sa première série des *Tournesols*. Elle est constituée de quatre tableaux et sera complétée par trois autres en janvier 1889. À chaque fois, un bouquet de 3 à 15 tournesols est placé dans un vase, sur un fond jaune ou bleu. Certains étaient destinés à décorer la chambre de Paul Gauguin, qui rejoint le peintre néerlandais en octobre 1888. D'ailleurs, dans une de ses œuvres, Gauguin a représenté Van Gogh en train de peindre un bouquet de tournesols. Peut-être *Vase avec cinq tournesols*, le tableau de la série qui fut détruit au Japon, en 1945, après un raid aérien.

À chaque fois, les tournesols sont montrés à différentes étapes de leur vie, de la floraison jusqu'au flétrissement. Mais ils se distinguent aussi par leur morphologie. En effet, certains ressemblent à des pompons ! Par exemple, sur le tableau conservé à la *National Gallery*, à Londres, on en compte sept (voir la figure a, page ci-contre). John Burke, de l'Université de Géorgie, à Athens, aux États-Unis, et ses collègues se sont intéressés aux bases génétiques de cet aspect.

Avant de décrire leurs résultats, détaillons l'anatomie d'un tournesol (*Helianthus annuus*). Il appartient à la famille des Astéracées (anciennement Composées), la plus grande du règne végétal (topinambour, pis-

senlit, pâquerette, artichaut...). Les fleurs de tournesols, nommées fleurons, sont réunies sur des capitules (un réceptacle floral charnu). Ainsi, ce que l'on nomme une « fleur » de tournesol est en fait constitué d'une multitude de fleurs vraies, les fleurons serrés sur un capitule. Dans le tournesol commun (figure b), les fleurons de la périphérie sont ligulés, c'est-à-dire qu'ils sont dotés d'une languette (la ligule, que l'on prend à tort pour un pétale), tandis que ceux du centre sont tubulés, en forme de tube (figure c) : seuls ces derniers sont pourvus d'organes reproducteurs.

Le gène muté dans les tournesols en pompons participe au contrôle de la symétrie florale.

Les tournesols en pompons sont des fleurs doubles. Dans ses *Lettres écrites de la montagne*, en 1764, Jean-Jacques Rousseau décrit le phénomène : « La fleur double est celle dont quelqu'une des parties est multipliée au-delà de son nombre naturel [...]. Ce mot de fleur double ne marque pas dans le nombre des pétales une simple duplication, mais une multiplication quelconque. » Dans les fleurs doubles de tournesol (figure d), au moins plusieurs rangs sinon la totalité des fleurons tubulés dans le type commun, dit sauvage, sont ligulés (figure e). L'équipe de J. Burke a voulu comprendre les mécanismes qui expliquent ces fleurs doubles.

Ils ont commencé par croiser des tournesols de type sauvage avec d'autres de type

fleur double. Les résultats sont conformes aux lois qu'a définies Mendel au milieu du XIX^e siècle, quelque 20 ans avant que Van Gogh ne peigne ses tournesols. Le caractère fleur double résulte de la mutation d'un seul gène et elle est dominante. D'autres croisements ont mis en évidence une seconde mutation du même gène, qui est récessive : elle se traduit par des fleurons d'un genre particulier : ils sont en forme de tube allongé et jaune, et contiennent des organes reproducteurs (voir les figures f et g). En d'autres termes, ils sont intermédiaires entre les fleurons ligulés et ceux tubulés des tournesols communs.

Les généticiens ont identifié le gène en cause et l'ont séquencé : il s'agit du gène *HaCYC2c* qui code un facteur de transcription, c'est-à-dire une protéine qui favorise l'expression d'autres gènes. La famille du gène *HaCYC2c* participe au contrôle de la symétrie florale. Dans le cas des fleurs doubles, la mutation consiste en l'insertion d'un nucléotide dans le promoteur du gène, celui-ci s'exprimant alors de façon anormale dans les fleurons centraux. Dans le second cas, la mutation résulte de l'insertion de transposons (des gènes mobiles) dans le gène lui-même et interdit son expression dans tous les fleurons.

Ce dernier type de tournesols est absent des tableaux de Van Gogh. N'en a-t-il pas trouvé ? Les trouvait-il peu esthétiques ? Ni l'histoire ni les *Lettres à Théo* ne le disent. ■

M. Chapman et al., Genetic analysis of floral symmetry in Van Gogh's sunflowers reveals independent recruitment of CYCLOIDEA genes in the Asteraceae, *PLoS Genetics*, vol. 8(3), e1002628, 2012.



© Gustavo Tomsich/CCRBIS

