

LOGIQUE & CALCUL

Combiner des pertes pour gagner

L'idée que, en associant plusieurs jeux défavorables, on puisse en obtenir un favorable est choquante. Les exemples de telles situations, dont le premier est dû à l'Espagnol Juan Parrondo, sont pourtant nombreux et variés.

Jean-Paul DELAHAYE

Si un jeu de hasard n'est pas trop compliqué, vous calculez ce qu'il rapporte ou fait perdre en moyenne à chaque partie. Le jeu de roulette des casinos français est « perdant » pour les joueurs : statistiquement, plus vous y jouez, plus vous perdez de l'argent. Dans sa version la plus simple, pour chaque euro joué sur un nombre, vous perdez en moyenne $1/37^e$ d'euro.

Autre exemple de jeu perdant : vous lancez une pièce de monnaie non truquée : si c'est PILE, vous gagnez 1 euro, si c'est FACE, vous perdez 2 euros. Comme vous gagnez une fois sur deux et perdez une fois sur deux, vous perdrez en moyenne 0,50 euro par partie. On dit que l'espérance mathématique du jeu vaut -0,50 euro par partie. Dans le cas de la roulette, elle est $-1/37^e$ d'euro pour chaque euro joué. Si le jeu est gagnant, et c'est le cas pour les mêmes jeux vus du côté de ceux qui vous les proposent, alors l'espérance est positive : $+1/37^e$ d'euro pour chaque euro joué dans le cas du casino et $+0,50$ euro par partie pour le PILE ou FACE inéquitable donné en exemple.

Rien n'interdit de jouer à deux jeux A et B en même temps ou d'alterner les deux jeux, par exemple en jouant régulièrement A, B, A, B, etc. Lorsque les jeux sont indépendants (c'est-à-dire n'influent pas l'un sur l'autre), si l'espérance de A est e , et celle de B est f , alors le jeu simultané de A et de B a une espérance $e + f$. Le jeu alterné a une espérance $(e + f)/2$. En jouant simultanément ou

alternativement à deux jeux indépendants d'espérance négative, vous créez donc un jeu perdant : la somme de deux nombres négatifs est négative !

Vous penseriez alors que combiner deux jeux perdants donne toujours un jeu perdant. C'est faux ! C'est le paradoxe de Parrondo et le sujet de notre rubrique. Découvert en 1996 par le physicien espagnol Juan Parrondo, ce paradoxe a suscité un intérêt considérable. On a dit, mais aussi contesté, qu'il concernait l'économie, la finance, la génétique des populations, la physique quantique. Surtout, il incite à rêver : en participant astucieusement à plusieurs jeux qui vous sont tous défavorables, il suggère qu'il est possible d'en tirer un jeu favorable. Cela ressemble à de la magie !

Gagner en combinant deux jeux perdants

Plus d'une centaine d'articles scientifiques ont été publiés pour l'étudier, le généraliser ou en proposer des variantes. Chaque année, de nouveaux travaux se réfèrent à ce paradoxe, preuve que l'idée initiale du chercheur espagnol est non seulement intéressante, mais d'une grande fécondité. Pourtant, comprendre pourquoi il est possible de combiner des jeux perdants pour gagner n'est pas facile.

Bien sûr, la combinaison de deux jeux perdants que propose le paradoxe de Parrondo n'est pas un simple jeu simultané ou alterné entre jeux indépendants, car de tels

jeux sont nécessairement perdants. J. Parrondo, dans la forme initiale du paradoxe, propose une combinaison plus subtile, où deux jeux très particuliers notés A et B sont mélangés.

Le jeu A consiste à lancer une pièce de monnaie légèrement truquée : PILE, qui fait gagner le joueur, tombe avec une probabilité $1/2 - e$, où e est un petit nombre positif ; FACE, qui fait perdre, tombe avec la probabilité complémentaire $1/2 + e$. Gagner rapporte un euro, perdre en coûte un. L'espérance d'un tel jeu est $-2e$ euros par partie ; comme elle est négative, le jeu A est perdant.

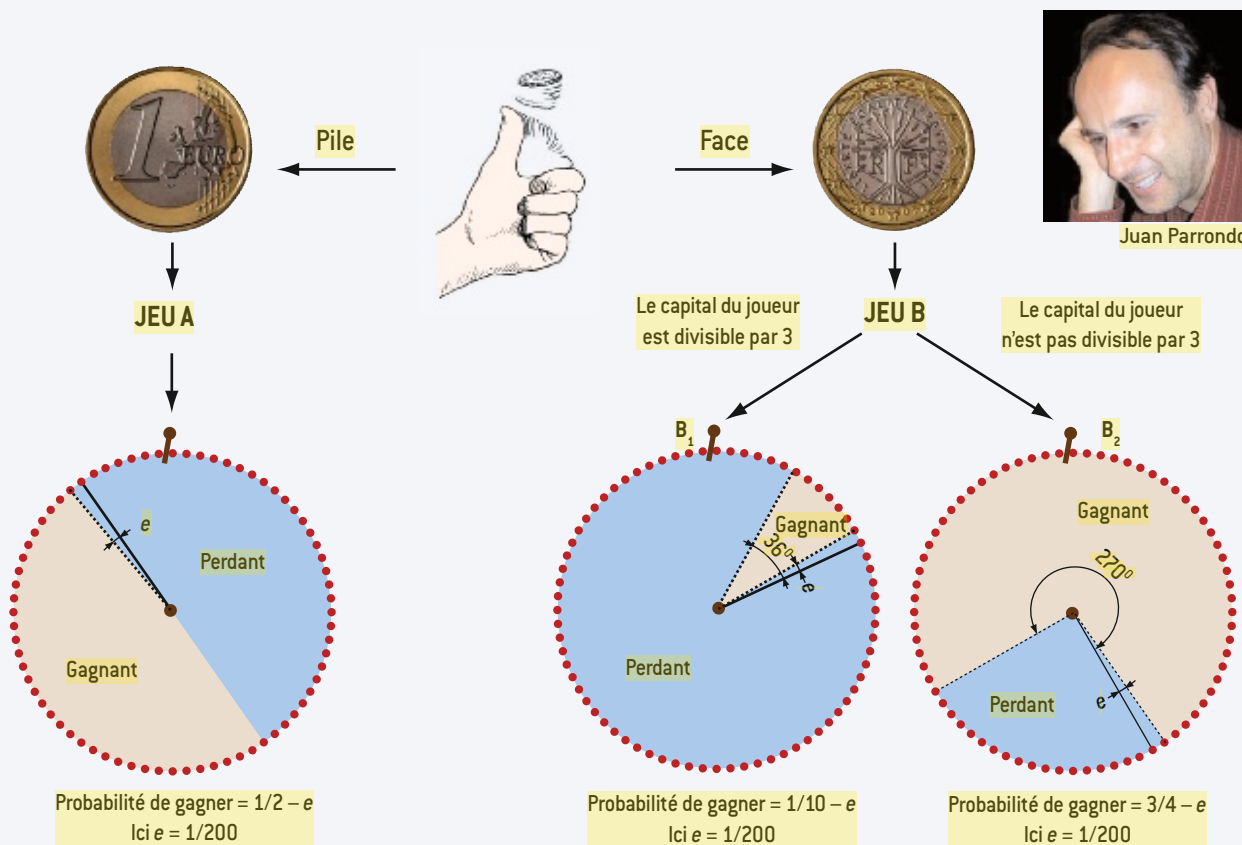
Le jeu B est un peu plus compliqué. Si le capital du joueur est un multiple de 3, il gagne un euro avec une probabilité $p_1 = 1/10 - e$ et perd un euro avec la probabilité $1 - p_1$; sinon, il gagne un euro avec une probabilité $p_2 = 3/4 - e$, et perd un euro avec la probabilité $1 - p_2$ (voir l'encadré 1).

On choisit une valeur de e qui rend le second jeu défavorable. C'est le cas pour la valeur $1/200$. L'espérance du jeu B est alors de $-0,0087$ euro par partie. Il s'agit d'une valeur assez faible, mais, à long terme, jouer au jeu B fait perdre de l'argent (voir le tableau 1 de l'encadré 1).

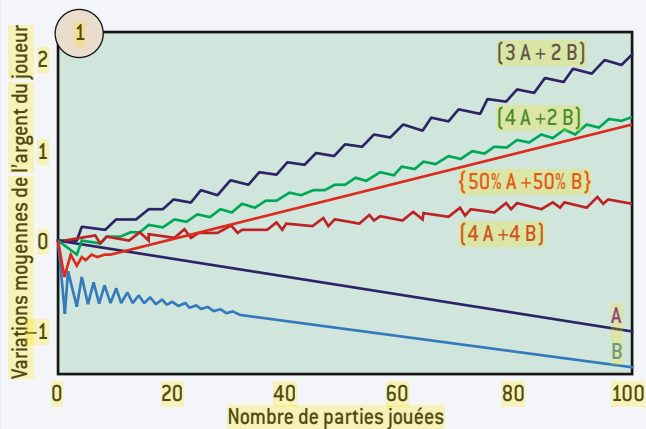
Il se produit alors un étonnant phénomène : une multitude de combinaisons simples des jeux A et B sont des jeux gagnants. L'expérimentation numérique montre par exemple que les trois combinaisons suivantes sont des jeux gagnants.

— Combinaison aléatoire équilibrée des jeux A et B, notée $\{50\% A + 50\% B\}$: on joue

1. Le paradoxe de Parrondo



Juan Parrondo



2

$m \backslash n$	1	2	3	4
1	-0,0070	+0,0580	-0,0027	+0,0294
2	+0,0089	+0,0148	+0,0009	+0,0053
3	+0,0065	+0,0201	+0,0054	+0,0110
4	+0,0028	+0,0113	-0,0013	+0,0049

Espérance de gain par partie des jeux $[nA + mB]$

Pour $e = 1/200$, les jeux A et B du paradoxe de Parrondo sont perdants. En jouant A, on perd en moyenne 0,01 euro par partie. En jouant B, on perd en moyenne 0,0087 euro par partie. En revanche, en combinant A et B, on construit divers jeux gagnants. Ainsi, en jouant aléatoirement une fois sur deux A, et une fois

sur deux B, jeu noté $\{50\% A + 50\% B\}$, on gagne en moyenne 0,01 euro par partie.

Les combinaisons périodiques sont elles aussi parfois gagnantes (voir les tableaux des espérances pour les jeux $[nA + mB]$): on joue n fois A, puis m fois B, et on recommence périodiquement. Les calculs pour le tableau 1 ont été faits en évaluant

la moyenne des résultats de 50 000 simulations. Pour le tableau 2, on en a utilisé 1 000 000.

N'y a-t-il pas là un miracle ? Pourrait-on exploiter ce paradoxe pour gagner de l'argent sur la roulette, ou pour imaginer des stratégies boursières assurant de gagner de l'argent sur des marchés boursiers en baisse ?