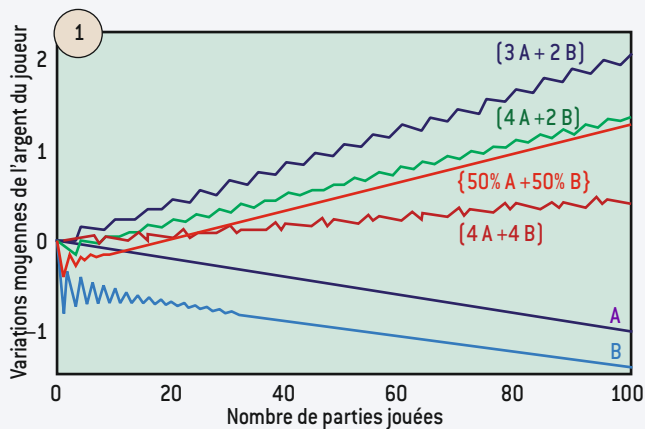
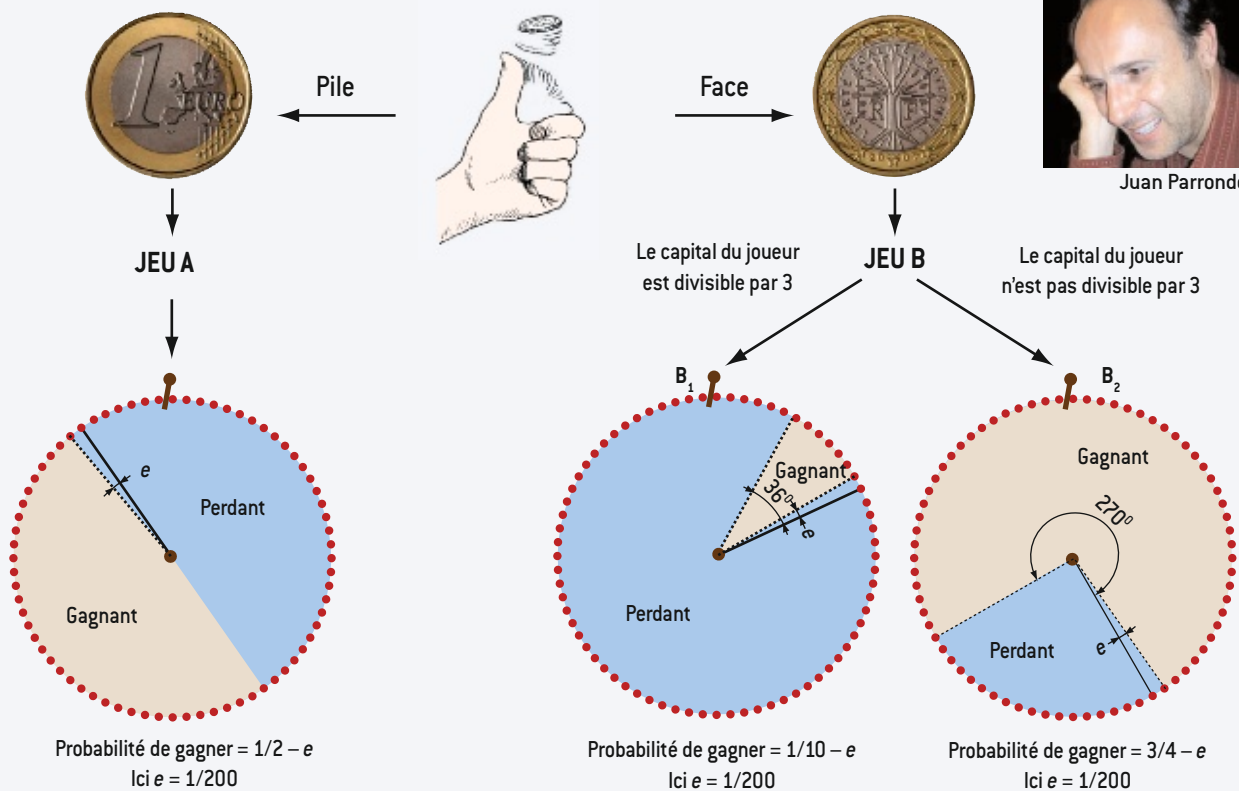


1. Le paradoxe de Parrondo



2

$n \backslash m$	1	2	3	4
1	-0,0070	+0,0580	-0,0027	+0,0294
2	+0,0089	+0,0148	+0,0009	+0,0053
3	+0,0065	+0,0201	+0,0054	+0,0110
4	+0,0028	+0,0113	-0,0013	+0,0049

Espérance de gain par partie des jeux $[nA + mB]$

Pour $e = 1/200$, les jeux A et B du paradoxe de Parrondo sont perdants. En jouant A, on perd en moyenne 0,01 euro par partie. En jouant B, on perd en moyenne 0,0087 euro par partie. En revanche, en combinant A et B, on construit divers jeux gagnants. Ainsi, en jouant aléatoirement une fois sur deux A, et une fois

sur deux B, jeu noté {50 % A + 50 % B}, on gagne en moyenne 0,01 euro par partie.

Les combinaisons périodiques sont elles aussi parfois gagnantes (voir les tableaux des espérances pour les jeux $[nA + mB]$): on joue n fois A, puis m fois B, et on recommence périodiquement. Les calculs pour le tableau 1 ont été faits en évaluant

la moyenne des résultats de 50 000 simulations. Pour le tableau 2, on en a utilisé 1 000 000.

N'y a-t-il pas là un miracle ? Pourrait-on exploiter ce paradoxe pour gagner de l'argent à la roulette, ou pour imaginer des stratégies boursières assurant de gagner de l'argent sur des marchés boursiers en baisse ?

2. L'explication fine du

Nous allons introduire une variante du paradoxe de Parrondo qui nous donnera la clef du mécanisme à l'œuvre, bien dissimulé.

Dans le cas examiné précédemment, le jeu B est composé de deux sous-jeux B_1 et B_2 . Quand $e = 1/200$, B_1 est défavorable, B_2 est favorable. Selon la valeur modulo 3 du capital du joueur, c'est B_1 ou B_2 qui est pratiqué. Le jeu que nous introduisons, B#, ressemble au jeu B à ceci près qu'au lieu de choisir selon le capital, on choisit aléatoirement entre B_1 et B_2 avec des probabilités $1/3$ et $2/3$ (avec une roue de loterie). L'espérance du jeu B# est la valeur moyenne des espérances de B_1 et B_2 pondérées par $1/3$ et $2/3$, soit :

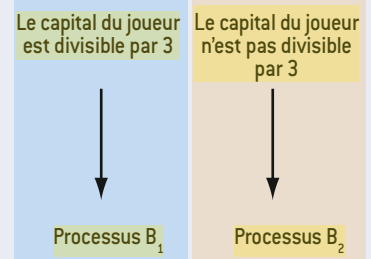
$1/3 (1/10 - e - 9/10 - e) + 2/3 (3/4 - e - 1/4 - e)$, qui devient, après simplification, $1/15 - 2e$.

Les valeurs de e qui rendent négative cette espérance vérifient $1/15 - 2e < 0$, soit $e > 1/30$. Pour la valeur $e = 1/200$ qu'utilise J. Parrondo, le jeu B# a donc une espérance positive : c'est un jeu gagnant. Que pour $e = 1/200$ le jeu B soit un jeu perdant est donc étonnant. Cela provient de ce que les variations du capital du joueur ne sont pas aléatoires et font que B_1 (qui est perdant) est choisi un peu plus souvent que dans $1/3$ des cas. La simulation numérique montre que B_1 est choisi dans 38,3 % des cas, ce qui est légèrement supérieur à $1/3$. L'analyse mathématique par la théorie des chaînes de Markov confirme ce résultat : B_1 est choisi dans exactement $32401/84463 = 38,361175\%$ des cas.

Cependant, ce léger glissement fortuit qui fait de B un jeu perdant n'a pas de raison de persister

Processus B

Le choix entre les processus B_1 et B_2 se fait selon la valeur du capital modulo 3



le jeu A ou le jeu B en choisissant au hasard à chaque fois, à pile ou face par exemple. L'espérance de ce jeu combiné est $+0,0147$, ce qui signifie qu'on gagne en moyenne 1,47 centime d'euro par partie.

– Combinaison périodique « 2 fois A, puis 2 fois B, etc. », notée $[2A + 2B]$. On choisit de jouer deux fois de suite le jeu A, puis deux fois le jeu B, et on recommence indéfiniment selon le même schéma. L'espérance de ce jeu combiné est de $+0,0148$; on gagne en moyenne 1,48 centime par partie.

– Combinaison périodique $[A + 2B]$. L'espérance est encore meilleure : $+0,058$; on gagne en moyenne 5,8 centimes par partie.

Il est étonnant que la combinaison de deux jeux perdants soit un jeu gagnant, d'autant que certaines autres combinaisons de A et B restent perdantes. La combinaison $[A + B]$ (jouer périodiquement A, puis B, puis A, etc.) est un jeu perdant d'espérance $-0,007$ (voir les tableaux 1 et 2 de l'encadré 1). Bien évidemment, si la combinaison de deux jeux perdants peut être un jeu gagnant, la combinaison de deux jeux gagnants est parfois un jeu perdant : on reprend les jeux A et B et on inverse gains et pertes !

Les résultats obtenus par simulation sont confirmés par la théorie des chaînes de Markov, théorie qui permet une étude mathématique complète des jeux composés utilisés dans le paradoxe de Parrondo.

Ces calculs sont assez longs et ne mettent pas en lumière les causes profondes des étonnants résultats de combinaisons. La confirmation du résultat des simulations par l'étude mathématique permet cependant d'affirmer qu'au sens strict, il n'y a pas de paradoxe, mais seulement une situation contraire à notre attente intuitive.

Comment comprendre cela ? Pourquoi notre bon sens est-il piégé ? Une vision claire est-elle possible ? L'explication profonde de ce qui se passe dans le cas du paradoxe de Parrondo provient de ce que le jeu B est composé d'un jeu perdant et d'un jeu gagnant. Le jeu gagnant est battu par le jeu perdant quand on joue B seul, mais s'impose plus fréquemment quand B est mélangé à A (voir l'encadré 2). Pour saisir comment deux jeux perdants peuvent engendrer un jeu gagnant et vous persuader qu'on ne doit pas s'en étonner, examinons un autre exemple, plus net, plus clair et plus spectaculaire que le paradoxe original.

Le rôle de l'interaction

Notons d'abord le point essentiel suivant : c'est l'existence d'un paramètre commun aux deux jeux et intervenant dans les règles, la valeur du capital du joueur, qui est à l'origine du phénomène paradoxal. Pour toutes les compositions produisant le paradoxe,

les deux jeux associés sont dépendants, chaque jeu faisant évoluer le paramètre partagé. S'il n'y avait pas ce lien entre A et B qui fait que ce qui se passe avec le jeu A influe sur le jeu B, et réciproquement, alors on pourrait, comme dans le cas des jeux simultanés ou alternés, appliquer des raisonnements montrant que le résultat ne peut être qu'un jeu perdant.

On démontre en effet que les jeux combinés du type $\{x\%A + y\%B\}$ (on joue au hasard A ou B en choisissant A avec une probabilité x et B avec la probabilité $y = 1 - x$) ou $[nA + mB]$ (on joue n fois A, puis m fois B, et on recommence) construits avec des jeux perdants indépendants sont nécessairement perdants : l'espérance de tels jeux composés est donnée par la formule $xe + yf$ pour les jeux $\{x\%A + y\%B\}$, et par la formule $(ne + mf)/(n + m)$ pour les jeux $[nA + mB]$, où e est l'espérance de A et f celle de B.

Sans interaction, deux jeux perdants donnent inéluctablement un jeu perdant : si vous voulez combiner des jeux perdants pour en faire des jeux gagnants, il faudra vous arranger pour que les jeux interagissent. Dans le cas de la roulette et de bien d'autres jeux, n'ayez pas trop d'espoir : pour la roulette, aucune martingale ne retourne en faveur du joueur l'avantage que le casino s'attribue. En conséquence, quelle que soit la combinaison de martingales que vous