

## 2. L'explication fine du

Nous allons introduire une variante du paradoxe de Parrondo qui nous donnera la clef du mécanisme à l'œuvre, bien dissimulé.

Dans le cas examiné précédemment, le jeu B est composé de deux sous-jeux  $B_1$  et  $B_2$ . Quand  $e = 1/200$ ,  $B_1$  est défavorable,  $B_2$  est favorable. Selon la valeur modulo 3 du capital du joueur, c'est  $B_1$  ou  $B_2$  qui est pratiqué. Le jeu que nous introduisons, B#, ressemble au jeu B à ceci près qu'au lieu de choisir selon le capital, on choisit aléatoirement entre  $B_1$  et  $B_2$  avec des probabilités  $1/3$  et  $2/3$  (avec une roue de loterie). L'espérance du jeu B# est la valeur moyenne des espérances de  $B_1$  et  $B_2$  pondérées par  $1/3$  et  $2/3$ , soit :

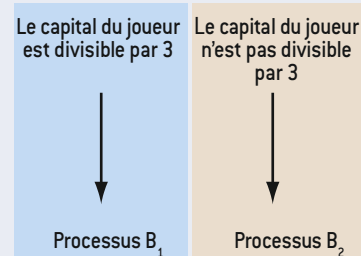
$1/3 (1/10 - e - 9/10 - e) + 2/3 (3/4 - e - 1/4 - e)$ , qui devient, après simplification,  $1/15 - 2e$ .

Les valeurs de  $e$  qui rendent négative cette espérance vérifient  $1/15 - 2e < 0$ , soit  $e > 1/30$ . Pour la valeur  $e = 1/200$  qu'utilise J. Parrondo, le jeu B# a donc une espérance positive : c'est un jeu gagnant. Que pour  $e = 1/200$  le jeu B soit un jeu perdant est donc étonnant. Cela provient de ce que les variations du capital du joueur ne sont pas aléatoires et font que  $B_1$  (qui est perdant) est choisi un peu plus souvent que dans  $1/3$  des cas. La simulation numérique montre que  $B_1$  est choisi dans 38,3 % des cas, ce qui est légèrement supérieur à  $1/3$ . L'analyse mathématique par la théorie des chaînes de Markov confirme ce résultat :  $B_1$  est choisi dans exactement  $32401/84463 = 38,361175\%$  des cas.

Cependant, ce léger glissement fortuit qui fait de B un jeu perdant n'a pas de raison de persister

### Processus B

Le choix entre les processus  $B_1$  et  $B_2$  se fait selon la valeur du capital modulo 3



le jeu A ou le jeu B en choisissant au hasard à chaque fois, à pile ou face par exemple. L'espérance de ce jeu combiné est  $+0,0147$ , ce qui signifie qu'on gagne en moyenne 1,47 centime d'euro par partie.

— Combinaison périodique « 2 fois A, puis 2 fois B, etc. », notée  $[2A + 2B]$ . On choisit de jouer deux fois de suite le jeu A, puis deux fois le jeu B, et on recommence indéfiniment selon le même schéma. L'espérance de ce jeu combiné est de  $+0,0148$  ; on gagne en moyenne 1,48 centime par partie.

— Combinaison périodique  $[A + 2B]$ . L'espérance est encore meilleure :  $+0,058$  ; on gagne en moyenne 5,8 centimes par partie.

Il est étonnant que la combinaison de deux jeux perdants soit un jeu gagnant, d'autant que certaines autres combinaisons de A et B restent perdantes. La combinaison  $[A + B]$  (jouer périodiquement A, puis B, puis A, etc.) est un jeu perdant d'espérance  $-0,007$  (voir les tableaux 1 et 2 de l'encadré 1). Bien évidemment, si la combinaison de deux jeux perdants peut être un jeu gagnant, la combinaison de deux jeux gagnants est parfois un jeu perdant : on reprend les jeux A et B et on inverse gains et pertes !

Les résultats obtenus par simulation sont confirmés par la théorie des chaînes de Markov, théorie qui permet une étude mathématique complète des jeux composés utilisés dans le paradoxe de Parrondo.

Ces calculs sont assez longs et ne mettent pas en lumière les causes profondes des étonnants résultats de combinaisons. La confirmation du résultat des simulations par l'étude mathématique permet cependant d'affirmer qu'au sens strict, il n'y a pas de paradoxe, mais seulement une situation contraire à notre attente intuitive.

Comment comprendre cela ? Pourquoi notre bon sens est-il piégé ? Une vision claire est-elle possible ? L'explication profonde de ce qui se passe dans le cas du paradoxe de Parrondo provient de ce que le jeu B est composé d'un jeu perdant et d'un jeu gagnant. Le jeu gagnant est battu par le jeu perdant quand on joue B seul, mais s'impose plus fréquemment quand B est mélangé à A (voir l'encadré 2). Pour saisir comment deux jeux perdants peuvent engendrer un jeu gagnant et vous persuader qu'on ne doit pas s'en étonner, examinons un autre exemple, plus net, plus clair et plus spectaculaire que le paradoxe original.

### Le rôle de l'interaction

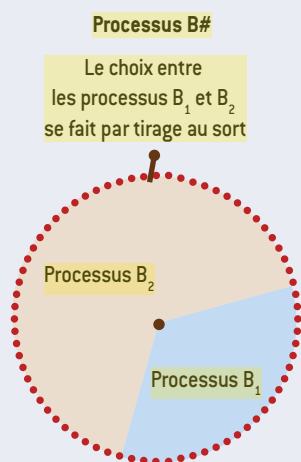
Notons d'abord le point essentiel suivant : c'est l'existence d'un paramètre commun aux deux jeux et intervenant dans les règles, la valeur du capital du joueur, qui est à l'origine du phénomène paradoxal. Pour toutes les compositions produisant le paradoxe,

les deux jeux associés sont dépendants, chaque jeu faisant évoluer le paramètre partagé. S'il n'y avait pas ce lien entre A et B qui fait que ce qui se passe avec le jeu A influe sur le jeu B, et réciproquement, alors on pourrait, comme dans le cas des jeux simultanés ou alternés, appliquer des raisonnements montrant que le résultat ne peut être qu'un jeu perdant.

On démontre en effet que les jeux combinés du type  $\{x\%A + y\%B\}$  (on joue au hasard A ou B en choisissant A avec une probabilité  $x$  et B avec la probabilité  $y = 1 - x$ ) ou  $[nA + mB]$  (on joue  $n$  fois A, puis  $m$  fois B, et on recommence) construits avec des jeux perdants indépendants sont nécessairement perdants : l'espérance de tels jeux composés est donnée par la formule  $xe + yf$  pour les jeux  $\{x\%A + y\%B\}$ , et par la formule  $(ne + mf)/(n + m)$  pour les jeux  $[nA + mB]$ , où  $e$  est l'espérance de A et  $f$  celle de B.

Sans interaction, deux jeux perdants donnent inéluctablement un jeu perdant : si vous voulez combiner des jeux perdants pour en faire des jeux gagnants, il faudra vous arranger pour que les jeux interagissent. Dans le cas de la roulette et de bien d'autres jeux, n'ayez pas trop d'espoir : pour la roulette, aucune martingale ne retourne en faveur du joueur l'avantage que le casino s'attribue. En conséquence, quelle que soit la combinaison de martingales que vous

## paradoxe de Parrondo



quand on combine le jeu B avec le jeu A. En effet, l'introduction du jeu A modifie le capital du joueur et, le plus souvent, la combinaison de A et de B fait que la proportion de cas où  $B_1$  est choisi (quand on joue B) se rapproche de  $1/3$ , faisant alors du jeu B (modifié par son association à A) un jeu gagnant. On peut même parier que plus la perturbation créée par le mélange de B avec un autre jeu sera complexe, plus il y aura de chances pour que la proportion de cas où  $B_1$  sera choisi (quand B sera joué) s'approche de  $1/3$ .

Dans le cas précis d'un mélange aléatoire équilibré  $\{50\% A + 50\% B\}$  entre A et B, la proportion d'utilisation de  $B_1$  quand B est utilisé passe de  $0,3836$  à  $0,3451$  conformément à la prédiction théorique formulée plus haut que cette valeur s'approcherait

de  $1/3$ . Lorsqu'on fait un mélange  $\{75\% A + 25\% B\}$ , le glissement est encore plus net, puisque cette fois la proportion d'utilisation de  $B_1$  passe à  $0,3363$ .

Notons enfin que B# est plus fortement gagnant que A n'est perdant : pour  $e = 1/200$ , l'espérance de A est  $-2e = -0,01$  et celle de B# est  $(1/15 - 2e) = +0,0566$ . En composant A et B, ce qui fera le plus souvent ressembler B à B#, il n'est donc pas étonnant qu'on obtienne facilement un jeu gagnant. C'est d'ailleurs le cas pour  $\{50\% A + 50\% B\}$  et pour  $\{75\% A + 25\% B\}$ .

En deux mots : combiner A (faiblement perdant) avec B (lui aussi faiblement perdant) fait se rapprocher B de B# (qui est gagnant plus fortement que A n'est perdant) et produit donc souvent et sans surprise un jeu gagnant.

pratiquerez, même en vous inspirant de la méthode de Parrondo, vous n'obtiendrez jamais une martingale gagnante.

### Une variante plus spectaculaire

Une variante du paradoxe de Parrondo, due à Roland Yéléhada, et dénommée « méga-paradoxe de Parrondo », éclairera le paradoxe.

On considère deux jeux utilisant un jeton à deux faces, l'une noire, l'autre blanche ; ce jeton sera le lien entre les deux jeux.

**Jeu A' :** on tire à pile ou face avec une pièce non truquée. Selon que le jeton montre son côté blanc ou son côté noir, on opère différemment.

Quand le jeton montre son côté blanc :

- si on a PILE, le joueur gagne 3 euros (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 1 euro et retourne le jeton.

Quand le jeton montre son côté noir :

- si on a PILE, le joueur gagne 1 euro (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 2 euros (et ne touche pas au jeton).

Le jeu A' est perdant. En effet, même si le jeton montre au départ son côté blanc et donc que le jeu est momentanément favorable au joueur, il finira par être retourné, ce qui conduira à un jeu défavorable, dont le joueur

ne sortira plus, puisque le jeton ne sera plus retourné et restera noir. L'espérance du jeu A' tendra vers  $-0,5$  euro par partie. La simulation numérique confirme ce résultat.

**Jeu B' :** on tire à pile ou face avec une pièce non truquée.

Quand le jeton montre son côté noir :

- si on a PILE, le joueur gagne 3 euros (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 1 euro, et retourne le jeton.

Quand le jeton montre son côté blanc :

- si on a PILE, le joueur gagne 1 euro (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 2 euros (et ne touche pas au jeton).

Comme le jeu A', le jeu B' (qui est le même que le jeu A' en échangeant le rôle du noir et du blanc) est perdant et son espérance est  $-0,50$  euro par partie (voir l'encadré 3). Pourtant, toutes les combinaisons simples des jeux A' et B' donnent des jeux gagnants.

— Combinaison aléatoire équilibrée des jeux A' et B', notée  $\{50\% A' + 50\% B'\}$  : on joue le jeu A' ou le jeu B' en choisissant au hasard, à pile ou face par exemple, de manière équilibrée le jeu pratiqué. L'espérance de ce jeu combiné est  $+0,246$  (on gagne en moyenne 24,6 centimes d'euro par partie). C'est encore le cas pour d'autres compositions du même type : l'espérance du jeu  $\{40\% A' + 60\% B'\}$  est  $+0,216$  euro par partie, celle du jeu

$\{30\% A' + 70\% B'\}$  est  $+0,130$  euro par partie.

— Combinaison périodique  $[A' + B']$ . On choisit de jouer une fois le jeu A', puis une fois le jeu B', et on recommence indéfiniment selon le même schéma. L'espérance de ce jeu combiné est de  $+0,50$  (on gagne en moyenne 50 centimes par partie). C'est encore le cas pour d'autres compositions du même type : l'espérance du jeu  $[2A' + 2B']$  est  $+0,399$  euro par partie, celle de  $[4A' + 3B']$  est  $+0,208$  euro par partie.

— Combinaison alternante que l'on note  $[0,3 : A' \leftrightarrow B']$  : on alterne les jeux A et B en décidant de changer de jeu avec une probabilité de  $0,3$  d'une partie à la suivante. L'espérance de ce jeu combiné est  $+0,06$  euro par partie. C'est aussi le cas pour d'autres combinaisons du même type : l'espérance du jeu  $[0,4 : A' \leftrightarrow B']$  est  $+0,16$  euro par partie, celle du jeu  $[0,5 : A' \leftrightarrow B']$  est  $+0,25$  euro par partie.

Cette variante du paradoxe de Parrondo est plus spectaculaire : les espérances des jeux combinés sont supérieures, alors que les espérances des jeux de départ sont plus négatives. Partant de deux jeux qui perdent 50 centimes d'euro par partie, on arrive, par exemple avec  $[A + B]$ , à un jeu qui en gagne 50, le retournement est total.

Le « truc » qui produit le prétendu paradoxe est maintenant susceptible d'une analyse rationnelle assez simple. Le jeu A'