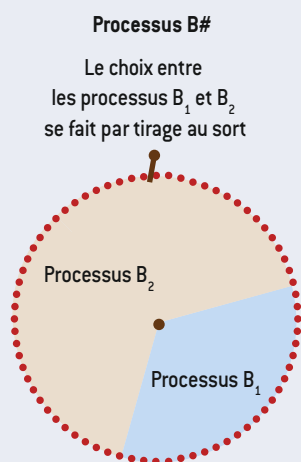


paradoxe de Parrondo



quand on combine le jeu B avec le jeu A. En effet, l'introduction du jeu A modifie le capital du joueur et, le plus souvent, la combinaison de A et de B fait que la proportion de cas où B_1 est choisi (quand on joue B) se rapproche de $1/3$, faisant alors du jeu B (modifié par son association à A) un jeu gagnant. On peut même parier que plus la perturbation créée par le mélange de B avec un autre jeu sera complexe, plus il y aura de chances pour que la proportion de cas où B_1 sera choisi (quand B sera joué) s'approche de $1/3$.

Dans le cas précis d'un mélange aléatoire équilibré $\{50\% A + 50\% B\}$ entre A et B, la proportion d'utilisation de B_1 quand B est utilisé passe de $0,3836$ à $0,3451$ conformément à la prédiction théorique formulée plus haut que cette valeur s'approcherait

de $1/3$. Lorsqu'on fait un mélange $\{75\% A + 25\% B\}$, le glissement est encore plus net, puisque cette fois la proportion d'utilisation de B_1 passe à $0,3363$.

Notons enfin que B# est plus fortement gagnant que A n'est perdant : pour $e = 1/200$, l'espérance de A est $-2e = -0,01$ et celle de B# est $(1/15 - 2e) = +0,0566$. En composant A et B, ce qui fera le plus souvent ressembler B à B#, il n'est donc pas étonnant qu'on obtienne facilement un jeu gagnant. C'est d'ailleurs le cas pour $\{50\% A + 50\% B\}$ et pour $\{75\% A + 25\% B\}$.

En deux mots : combiner A (faiblement perdant) avec B (lui aussi faiblement perdant) fait se rapprocher B de B# (qui est gagnant plus fortement que A n'est perdant) et produit donc souvent et sans surprise un jeu gagnant.

pratiquerez, même en vous inspirant de la méthode de Parrondo, vous n'obtiendrez jamais une martingale gagnante.

Une variante plus spectaculaire

Une variante du paradoxe de Parrondo, due à Roland Yéléhada, et dénommée « méga-paradoxe de Parrondo », éclairera le paradoxe.

On considère deux jeux utilisant un jeton à deux faces, l'une noire, l'autre blanche ; ce jeton sera le lien entre les deux jeux.

Jeu A' : on tire à pile ou face avec une pièce non truquée. Selon que le jeton montre son côté blanc ou son côté noir, on opère différemment.

Quand le jeton montre son côté blanc :

- si on a PILE, le joueur gagne 3 euros (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 1 euro et retourne le jeton.

Quand le jeton montre son côté noir :

- si on a PILE, le joueur gagne 1 euro (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 2 euros (et ne touche pas au jeton).

Le jeu A' est perdant. En effet, même si le jeton montre au départ son côté blanc et donc que le jeu est momentanément favorable au joueur, il finira par être retourné, ce qui conduira à un jeu défavorable, dont le joueur

ne sortira plus, puisque le jeton ne sera plus retourné et restera noir. L'espérance du jeu A' tendra vers $-0,5$ euro par partie. La simulation numérique confirme ce résultat.

Jeu B' : on tire à pile ou face avec une pièce non truquée.

Quand le jeton montre son côté noir :

- si on a PILE, le joueur gagne 3 euros (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 1 euro, et retourne le jeton.

Quand le jeton montre son côté blanc :

- si on a PILE, le joueur gagne 1 euro (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 2 euros (et ne touche pas au jeton).

Comme le jeu A', le jeu B' (qui est le même que le jeu A' en échangeant le rôle du noir et du blanc) est perdant et son espérance est $-0,50$ euro par partie (voir l'encadré 3). Pourtant, toutes les combinaisons simples des jeux A' et B' donnent des jeux gagnants.

— Combinaison aléatoire équilibrée des jeux A' et B', notée $\{50\% A' + 50\% B'\}$: on joue le jeu A' ou le jeu B' en choisissant au hasard, à pile ou face par exemple, de manière équilibrée le jeu pratiqué. L'espérance de ce jeu combiné est $+0,246$ (on gagne en moyenne 24,6 centimes d'euro par partie). C'est encore le cas pour d'autres compositions du même type : l'espérance du jeu $\{40\% A' + 60\% B'\}$ est $+0,216$ euro par partie, celle du jeu

$\{30\% A' + 70\% B'\}$ est $+0,130$ euro par partie.

— Combinaison périodique $[A' + B']$. On choisit de jouer une fois le jeu A', puis une fois le jeu B', et on recommence indéfiniment selon le même schéma. L'espérance de ce jeu combiné est de $+0,50$ (on gagne en moyenne 50 centimes par partie). C'est encore le cas pour d'autres compositions du même type : l'espérance du jeu $[2A' + 2B']$ est $+0,399$ euro par partie, celle de $[4A' + 3B']$ est $+0,208$ euro par partie.

— Combinaison alternante que l'on note $\{0,3 : A' \leftrightarrow B'\}$: on alterne les jeux A et B en décidant de changer de jeu avec une probabilité de $0,3$ d'une partie à la suivante. L'espérance de ce jeu combiné est $+0,06$ euro par partie. C'est aussi le cas pour d'autres combinaisons du même type : l'espérance du jeu $\{0,4 : A' \leftrightarrow B'\}$ est $+0,16$ euro par partie, celle du jeu $\{0,5 : A' \leftrightarrow B'\}$ est $+0,25$ euro par partie.

Cette variante du paradoxe de Parrondo est plus spectaculaire : les espérances des jeux combinés sont supérieures, alors que les espérances des jeux de départ sont plus négatives. Partant de deux jeux qui perdent 50 centimes d'euro par partie, on arrive, par exemple avec $[A + B]$, à un jeu qui en gagne 50, le retournement est total.

Le « truc » qui produit le prétendu paradoxe est maintenant susceptible d'une analyse rationnelle assez simple. Le jeu A'

comme le jeu B' sont perdants car, même si au départ on peut gagner plusieurs fois de suite, les règles font qu'on tombe rapidement dans un état défavorable qui fait inéluctablement perdre de l'argent au joueur.

Une explication simple!

Cet état défavorable est celui correspondant au côté BLANC du jeton pour le jeu A', et au côté NOIR du jeton pour le jeu B'. La combinaison des jeux A' et B' a pour effet de

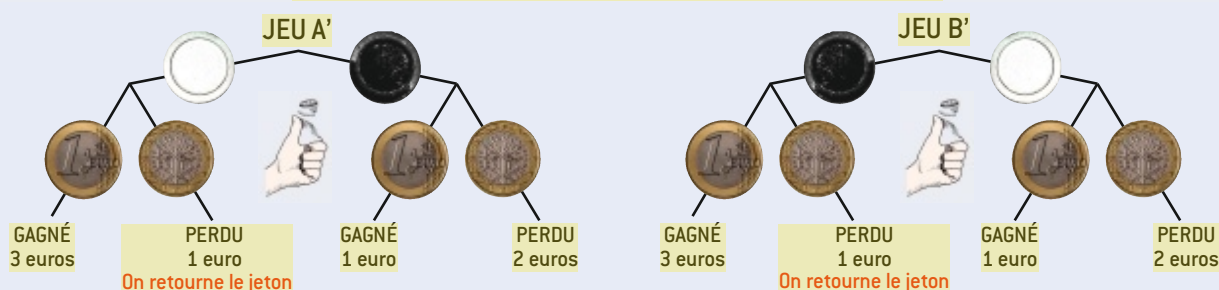
permettre au joueur qui joue A' de sortir de l'état de blocage BLANC qui lui est défavorable et dans lequel il reste indéfiniment coincé quand seul A' est pratiqué. Le jeu B', qui subit de même un blocage dû au côté NOIR du jeton, en sort grâce au jeu A'. En jouant un seul des jeux, A' ou B', le joueur tombe dans un piège dont il ne sort plus. En jouant alternativement l'un ou l'autre (et plus généralement en mélangeant A' et B'), chaque jeu débloque l'autre.

Comme on le constate en examinant les valeurs numériques des diverses combi-

naisons (voir l'encadré 3), plus les basculements entre A' et B' sont rapides dans un jeu combiné, plus le jeu composé est gagnant. Inversement, si les changements de A' à B' et de B' à A' sont trop lents, la combinaison des deux jeux perdants reste un jeu perdant. C'est ainsi que :

- le jeu $\{5\% A + 95\% B\}$ est perdant, d'espérance $-0,35$ euro par partie.
- le jeu $\{8A' + 8B'\}$ est perdant, avec une espérance de $-0,13$ euro par partie.
- le jeu $\{0,2 : A' \leftrightarrow B'\}$ est perdant, d'espérance $-0,07$ euro par partie.

3. Le mégaparaux de Parrondo



Les jeux A' et B' du mégaparaux de Parrondo (découvert par Roland Yéléhada en 2011) dépendent d'un jeton mis en commun quand on compose les jeux. Dans chaque jeu, on tire à pile ou face avec une pièce non truquée. Selon que le jeton montre son côté blanc ou son côté noir, on opère différemment.

Jeu A'. Quand le jeton est blanc, si on a PILE, le joueur gagne 3 euros, si on a FACE, le joueur perd 1 euro et retourne le jeton. Dans le cas où le jeton montre son côté noir, si on a PILE, le joueur gagne 1 euro; si on a FACE, le joueur perd 2 euros.

Jeu B'. Quand le jeton montre son côté noir, si on a PILE, le joueur gagne 3 euros; si on a FACE, le joueur perd 1 euro, et retourne le jeton. Dans le cas où le jeton montre son côté blanc, si on a PILE, le joueur gagne 1 euro, si on a FACE, le joueur perd 2 euros.

Chaque jeu possède une espérance très négative de $-0,50$ euro par partie, mais toutes les compositions simples associant A et B sont nettement gagnantes. C'est seulement pour les compositions où de longues séquences de la même stratégie sont jouées consécutivement que l'espérance est négative. Le texte de l'article donne la clef de ce comportement.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Espérance de $\{x\% A' + y\% B'\}$	-0,500	-0,229	-0,022	+0,130	+0,216	+0,246	+0,220	+0,128	-0,018	-0,231	-0,500

Schéma de composition 1 : $\{x\% A' + y\% B'\}$. On joue aléatoirement le jeu A' ou le jeu B' avec la probabilité x (exprimée en pourcentage) de choisir A' et $y = 1 - x$ de choisir B'.

n \ m	1	2	3	4	5	6
1	+0,500	+0,356	+0,199	+0,080	-0,007	-0,076
2	+0,356	+0,399	+0,312	+0,214	+0,128	+0,055
3	+0,199	+0,312	+0,277	+0,208	+0,139	+0,075
4	+0,080	+0,214	+0,208	+0,161	+0,106	+0,055
5	-0,007	+0,128	+0,139	+0,106	+0,063	+0,021
6	-0,076	+0,055	+0,075	+0,055	+0,021	-0,016

Schéma de composition 2 : $[mA' + nB']$. On joue périodiquement m fois le jeu A', puis n fois le jeu B'.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Espérance de $\{x : A' \leftrightarrow B'\}$	-0,500	-0,250	-0,070	+0,061	+0,167	+0,250	+0,318	+0,376	+0,424	+0,464	+0,500

Schéma de composition 3 : $[x : A' \leftrightarrow B']$. On joue l'un des jeux A' ou B', en changeant de l'un à l'autre avec la probabilité x.