

comme le jeu B' sont perdants car, même si au départ on peut gagner plusieurs fois de suite, les règles font qu'on tombe rapidement dans un état défavorable qui fait inéluctablement perdre de l'argent au joueur.

Une explication simple!

Cet état défavorable est celui correspondant au côté BLANC du jeton pour le jeu A', et au côté NOIR du jeton pour le jeu B'. La combinaison des jeux A' et B' a pour effet de

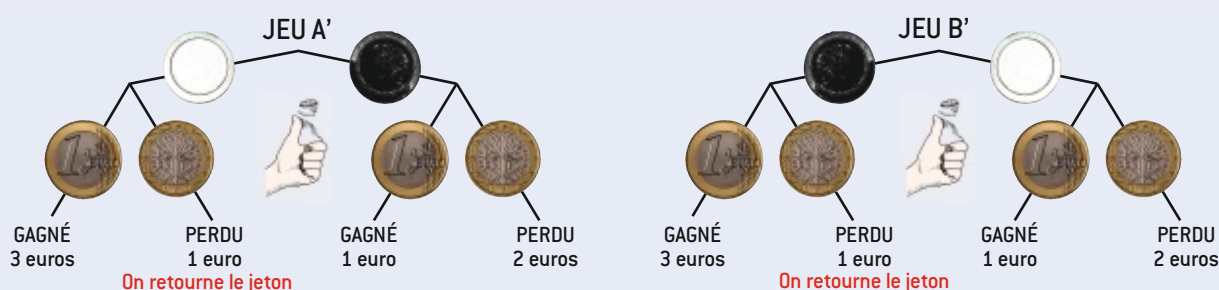
permettre au joueur qui joue A' de sortir de l'état de blocage BLANC qui lui est défavorable et dans lequel il reste indéfiniment coincé quand seul A' est pratiqué. Le jeu B', qui subit de même un blocage dû au côté NOIR du jeton, en sort grâce au jeu A'. En jouant un seul des jeux, A' ou B', le joueur tombe dans un piège dont il ne sort plus. En jouant alternativement l'un ou l'autre (et plus généralement en mélangeant A' et B'), chaque jeu débloque l'autre.

Comme on le constate en examinant les valeurs numériques des diverses combi-

naisons (voir l'encadré 3), plus les basculements entre A' et B' sont rapides dans un jeu combiné, plus le jeu composé est gagnant. Inversement, si les changements de A' à B' et de B' à A' sont trop lents, la combinaison des deux jeux perdants reste un jeu perdant. C'est ainsi que :

- le jeu $\{5\%A + 95\%B\}$ est perdant, d'espérance $-0,35$ euro par partie.
- le jeu $\{8A' + 8B'\}$ est perdant, avec une espérance de $-0,13$ euro par partie.
- le jeu $\{0,2 : A' \leftrightarrow B'\}$ est perdant, d'espérance $-0,07$ euro par partie.

3. Le mégaparadoxe de Parrondo



Les jeux A' et B' du mégaparadoxe de Parrondo (découvert par Roland Yéléhada en 2011) dépendent d'un jeton mis en commun quand on compose les jeux. Dans chaque jeu, on tire à pile ou face avec une pièce non truquée. Selon que le jeton montre son côté blanc ou son côté noir, on opère différemment.

Jeu A'. Quand le jeton est blanc, si on a PILE, le joueur gagne 3 euros, si on a FACE, le joueur perd 1 euro et retourne le jeton. Dans le cas où le jeton montre son côté noir, si on a PILE, le joueur gagne 1 euro; si on a FACE, le joueur perd 2 euros.

Jeu B'. Quand le jeton montre son côté noir, si on a PILE, le joueur gagne 3 euros; si on a FACE, le joueur perd 1 euro, et retourne le jeton. Dans le cas où le jeton montre son côté blanc, si on a PILE, le joueur gagne 1 euro, si on a FACE, le joueur perd 2 euros.

Chaque jeu possède une espérance très négative de $-0,50$ euro par partie, mais toutes les compositions simples associant A et B sont nettement gagnantes. C'est seulement pour les compositions où de longues séquences de la même stratégie sont jouées consécutivement que l'espérance est négative. Le texte de l'article donne la clef de ce comportement.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Espérance de $\{x\%A' + y\%B'\}$	-0,500	-0,229	-0,022	+0,130	+0,216	+0,246	+0,220	+0,128	-0,018	-0,231	-0,500

Schéma de composition 1 : $\{x\%A' + y\%B'\}$. On joue aléatoirement le jeu A' ou le jeu B' avec la probabilité x (exprimée en pourcentage) de choisir A' et $y = 1 - x$ de choisir B'.

n \ m	1	2	3	4	5	6
1	+0,500	+0,356	+0,199	+0,080	-0,007	-0,076
2	+0,356	+0,399	+0,312	+0,214	+0,128	+0,055
3	+0,199	+0,312	+0,277	+0,208	+0,139	+0,075
4	+0,080	+0,214	+0,208	+0,161	+0,106	+0,055
5	-0,007	+0,128	+0,139	+0,106	+0,063	+0,021
6	-0,076	+0,055	+0,075	+0,055	+0,021	-0,016

Schéma de composition 2 : $[mA' + nB']$. On joue périodiquement m fois le jeu A', puis n fois le jeu B'.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Espérance de $\{x : A' \leftrightarrow B'\}$	-0,500	-0,250	-0,070	+0,061	+0,167	+0,250	+0,318	+0,376	+0,424	+0,464	+0,500

Schéma de composition 3 : $[x : A' \leftrightarrow B']$. On joue l'un des jeux A' ou B', en changeant de l'un à l'autre avec la probabilité x.

La combinaison de deux jeux perdants en interaction produit quelquefois un effet de déblocage mutuel, qui est apparent avec A' et B'. Parfois, cette combinaison produit seulement une perturbation légère du comportement de l'un des jeux ; c'est ce qui se passe pour le jeu B de Parrondo quand il interagit avec A. Si cette perturbation est suffisante, on passe d'un jeu perdant à un jeu gagnant. Le cas du paradoxe de Parrondo initial est de la même nature que le cas des jeux A' et B' : l'interaction de A et B, d'une manière un peu cachée, aide le jeu B et fait de la combinaison un jeu gagnant.

On comprend qu'il n'y a là rien de miraculeux, puisque les jeux qui partagent un paramètre (la valeur du capital du joueur, la position d'un jeton, etc.) ne sont pas indépendants et que le déroulement d'un jeu peut s'y trouver profondément perturbé par l'autre. Les interactions des jeux changent parfois les dynamiques des jeux comme si un intervenant extérieur en manipulait les résultats. Que de telles manipulations fassent parfois passer d'un jeu perdant à un jeu gagnant ou l'inverse ne surprend nullement... après réflexion.

Paradoxe de Parrondo : ne pas en abuser !

Chaque fois que l'on rencontre un cas où l'interaction de deux dynamiques ou deux entités négatives en produit une positive, il est devenu courant de dire qu'il s'agit d'une « variante du paradoxe de Parrondo », et cela explique en partie le grand nombre d'articles mentionnant le paradoxe. C'est là un usage un peu excessif de l'expression, car on connaît depuis bien longtemps en physique et en mathématiques des situations où deux propriétés négatives combinées en donnent une positive.

Ce qu'on nomme *Ouzo's effect* en anglais, et qu'en français on nommerait plutôt *effet pastis* est une telle situation. L'eau n'arrête pas la lumière, le pastis pur non plus. Pourtant, une fois mélangés, on obtient un liquide opaque qui arrête la lumière. Doit-on y voir une variante du paradoxe de Parrondo ? Ce serait ridicule ! En mathématiques, la somme de deux nombres

transcendants (c'est-à-dire qui ne sont pas solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers) est parfois un nombre algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers). C'est le cas pour les deux nombres π et $1 - \pi$. Doit-on y voir une variante du paradoxe de Parrondo ? Certes pas. Il sera plus sage de réserver l'expression au domaine de la théorie des jeux.

S'il ne faut sans doute pas accorder au paradoxe de Parrondo une importance excessive, notons qu'il joue un rôle très positif et parfaitement conforme aux rôles joués par les meilleurs paradoxes de l'histoire des mathématiques et de la physique. Il met le doigt sur une attente intuitive injustifiée provenant d'une analyse précipitée : ici fondée sur l'idée que les propriétés des combinaisons de jeux indépendants restent valables pour les combinaisons de jeux liés. Il permet de réfléchir aux conditions de composition qui assurent l'additivité des espérances (et donc que la composition de deux jeux perdants le sera encore), il conduit à la mise au point d'exemples simples qui, une fois assimilés, évitent de tomber dans le piège de l'oubli de la condition d'indépendance.

Dans le cas du paradoxe de Parrondo, il faut peut-être regretter que la complexité de l'exemple de départ laisse persister l'espoir chez certains qu'il se produit vraiment un phénomène général dont la clef pourrait contredire ce qu'on sait des situations les plus classiques de théorie des jeux.

La théorie du paradoxe de Parrondo n'est pas comme la théorie de la relativité ou la mécanique quantique qui ont montré que la physique classique est fautive dans certains cas. Elle ne contredit pas les résultats obtenus avant qu'on en ait eu connaissance en nous proposant une nouvelle vision de la théorie des jeux. C'est seulement une mise en garde contre une mauvaise interprétation des résultats sur la composition de jeux et la confusion entre jeux indépendants et jeux liés. Le désir de miracle est insatiable, y compris chez les plus rationnels des scientifiques. Seul un effort intellectuel déterminé et constant permet d'éviter qu'il nous conduise à l'erreur. ■

■ L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

- S. N. Ethier et J. Lee, *Parrondo Games With Spatial Dependence*, 2012.
<http://arxiv.org/pdf/1203.0818.pdf>
- D. Abbott, *Asymmetry and disorder : A decade of Parrondo's paradox*, *Fluct. Noise Lett.*, vol. 9, pp. 129-156, 2010.
- S. N. Ethier et J. Lee, *Limit theorems for Parrondo's paradox*, *Electron. J. Probab.*, vol. 14, pp. 1827-1862, 2009.
- Z. Mihailovic et M. Rajkovic, *Cooperative Parrondo's games on a two-dimensional lattice*, *Physica A*, vol. 365, pp. 244-251, 2006.
- R. Iyengar et R. Kohli, *Why Parrondo's paradox is irrelevant for utility theory, stock buying, and the emergence of life*, *Complexity*, vol. 9(1), pp. 23-27, 2004.
- G. P. Harmer et D. Abbott, *A review of Parrondo's paradox*, *Fluct. Noise Lett.*, vol. 2, pp. 71-107, 2002.
- G. P. Harmer et D. Abbott, *Parrondo's paradox*, *Statist. Sci.*, vol. 14, pp. 206-213, 1999.