

 LOGIQUE & CALCUL

# Les plaisirs du rectangle

*Trois mille ans de géométrie n'ont pas épuisé tout ce qu'un mathématicien peut dire de l'élémentaire figure géométrique du rectangle.*

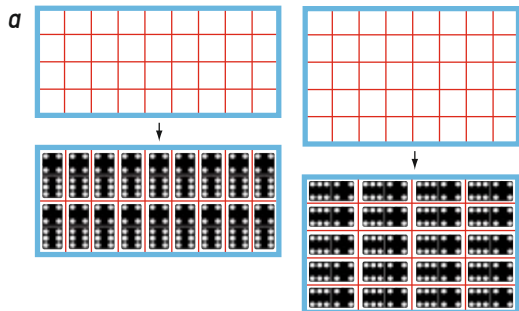
Jean-Paul DELAHAYE

**Q** uoi de plus simple qu'un rectangle ! Pourtant ce rectangle recèle des problèmes aux beautés cachées : nous allons en voir certains qui sont inattendus. Vous serez sans doute surpris de découvrir que nombres d'entre eux sont assez récents.

Commençons par des questions élémentaires. Le problème du recouvrement d'un damier rectangulaire de côtés entiers  $n$  et  $m$  par des dominos (rectangles  $1 \times 2$ ) est assez facile. Si  $n$  et  $m$  sont impairs, le recouvrement est impossible, car le nombre total de carrés est impair. Si  $n$  ou  $m$  est pair, c'est possible : on aligne des dominos horizontalement ou verticalement selon que  $n$  ou  $m$  est pair (voir la figure a).

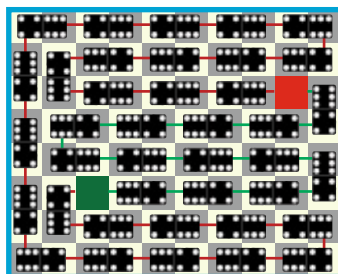
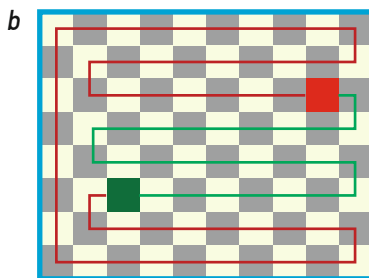
## Découpage et coloriage

L'exploitation d'un coloriage bicolor en damier permet de résoudre toutes les questions du type suivant : en enlevant deux carrés ( $1 \times 1$ ) d'un rectangle  $n \times m$  ( $n$  ou  $m$  pair), peut-on encore recouvrir ce qui reste du rectangle avec des dominos ?

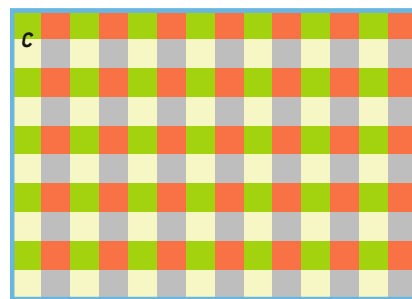


Si les deux carrés enlevés sont de la même couleur, par exemple aux deux coins diagonalement opposés, la réponse est négative : chaque domino recouvrant une case noire et une case blanche, il y a maintenant deux cases de plus d'une des couleurs. Si les deux cases enlevées sont de couleurs différentes, alors le rectangle diminué des deux cases peut être pavé par des dominos : on considère un chemin qui revient à son point de départ et qui passe par toutes les cases (si  $n$  ou  $m$  est pair, il existe) ; en enlevant deux cases de couleurs différentes, il reste deux bouts de chemin de longueur paire (en vert et en rouge sur la figure b), qu'il est facile de recouvrir par des dominos.

Ces raisonnements par coloriage sont puissants et parfois subtils. Ainsi, comment



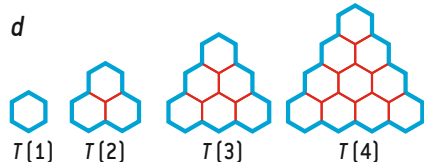
prouver que l'on ne peut pas recouvrir exactement un damier  $10 \times 14$  avec des rectangles  $1 \times 4$ , bien que 140 soit un multiple de 4 ? Colorions le damier avec quatre couleurs comme sur la figure c (ci-dessous). En



posant verticalement ou horizontalement un rectangle  $1 \times 4$  sur les cases de ce coloriage, il couvre nécessairement deux cases d'une couleur et deux cases d'une autre couleur. Si on pouvait recouvrir le damier  $10 \times 14$  avec des dominos  $1 \times 4$ , le nombre de cases vertes (par exemple) couvertes serait donc pair. C'est impossible, car il y a 35 cases vertes. Le même raisonnement montre qu'on ne recouvrira jamais par des rectangles  $1 \times 4$  les rectangles  $6 \times 6$ ,  $6 \times 10$ ,  $6 \times 14$ ,  $10 \times 10$ ,  $10 \times 14$ , et plus généralement les rectangles  $(4n + 2) \times (4m + 2)$  qui ont pourtant tous un nombre de cases multiple de 4.

Notons que les raisonnements avec des coloriages ne peuvent pas démontrer toutes les impossibilités de recouvrement : en 1990, John Conway et Jeffrey Lagarias, après avoir étudié soigneusement ce que peuvent donner les arguments de coloriages, ont proposé un problème dont ils ont démontré qu'il est impossible à résoudre par un argument de coloriage.

Ce résultat ne concerne pas les rectangles, mais les figures  $T(n)$  formées d'hexagones juxtaposés (voir la figure d). J. Conway et J. Lagarias ont montré que  $T(n)$  est pavable par des copies de  $T(2)$  si  $n = 12k$  ou  $n = 12k + 2$  ou  $n = 12k + 9$  ou  $n = 12k + 11$ . Dans les autres cas, le pavage de  $T(n)$  par  $T(2)$  est impossible, mais aucun argument de coloriage n'aboutira.



## Pavages par rectangles $1 \times 2$ et $1 \times 3$

Les pavages par les rectangles  $1 \times 2$  et  $1 \times 3$  semblent faciles à obtenir. C'est à la fois vrai et faux. D'une part, d'après un résultat démontré en 1995 par Danièle Beauquier, Maurice Nivat, Eric Remila et Mike Robson, le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles  $1 \times 2$  placés horizontalement et des rectangles  $1 \times 3$  placés verticalement ?* est NP-complet. Il s'ensuit qu'on ne connaît aucun algorithme fonctionnant en temps polynomial qui réponde à la question. Les problèmes NP-complets sont considérés comme impossibles à résoudre en pratique : les temps de résolution croissent trop vite quand la valeur des données augmente.

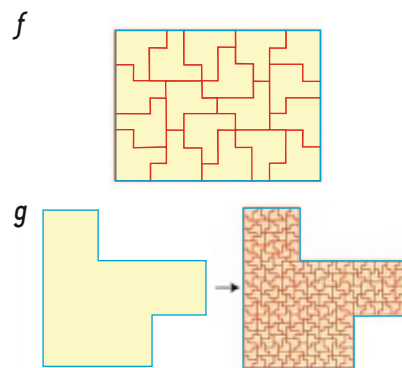
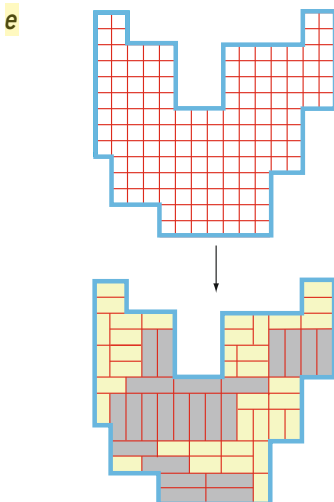
D'autre part, parallèlement au résultat indiquant qu'il est difficile de trouver les pavages envisagés par les rectangles  $1 \times 2$  et  $1 \times 3$ , un résultat affirme que ce type de pavage est parfois facile à trouver : si on n'impose plus le positionnement horizontal des rectangles  $1 \times 2$  et vertical des rectangles  $1 \times 3$ , alors tout change. E. Remila a établi que le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles  $1 \times 2$  et  $1 \times 3$  (sans contrainte d'horizontalité ou de verticalité) ?* se traite en temps proportionnel au nombre de carrés de la figure à paver, c'est-à-dire rapidement (voir la figure e).

Les démonstrations de ces deux résultats sont bien sûr assez délicates et nous

ne les détaillerons pas, mais elles illustrent l'idée que la prise en considération des algorithmes introduit un intéressant renouvellement en géométrie : les mathématiciens étendent toujours les domaines sur lesquels leur curiosité se porte.

Les problèmes de pavage avec des dominos, ou plus généralement des polyminos (formes composées de plusieurs carrés juxtaposés), n'ont pas qu'un intérêt ludique. David Vanderhaeghe, de l'INRIA à Grenoble, et Victor Ostromoukhov, de l'Université de Montréal, ont conçu en 2008 une méthode de représentation graphique fondée sur les pavages de rectangles à l'aide de polyminos permettant un meilleur rendu esthétique. Le découpage d'une image en « pixels » pas trop réguliers et pas trop bien rangés est meilleur que les codages tirés des réseaux totalement réguliers habituels faits de grilles rectangulaires. Partant d'un pavage de rectangles par un polymino fixé (étudiés soigneusement par Michael Reid dans les années 1990), on en déduit un pavage du polymino par lui-même (voir les figures f et g). Ce pavage utilisé plusieurs fois permet de découper facilement tout rectangle en « pixels » irréguliers aussi fins qu'on le souhaite.

Le problème le plus simple concernant le pavage de rectangles par des rectangles et qui généralise celui du rectangle  $10 \times 14$  cité plus haut est le suivant : *Dans quels cas des copies d'un petit rectangle  $a \times b$  remplissent-elles exacte-*



ment un grand rectangle  $n \times m$  ? ( $n$ ,  $m$ ,  $a$  et  $b$  sont des entiers). Les travaux de Nicolaas de Bruijn et David Klarner ont résolu la question en 1969. Le rectangle  $n \times m$  peut être recouvert par des rectangles  $a \times b$  si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- [1]  $nm$  est multiple de  $ab$  ;
- [2]  $n$  et  $m$  peuvent chacun s'écrire comme une somme de  $a$  et de  $b$  ;
- [3] ( $n$  ou  $m$  est multiple de  $a$ ) et ( $n$  ou  $m$  est multiple de  $b$ ).

## Paver un rectangle avec des copies d'un même rectangle

Réfléchissons aux trois conditions. La condition [1] est évidemment nécessaire. La condition [2] est elle aussi nécessaire car, si un pavage existe, en suivant le bord de longueur  $n$  du rectangle pavé, on trouvera une somme de  $a$  et de  $b$  donnant  $n$ , par exemple  $2a + 5b$ . De même pour  $m$ . La troisième condition est aussi nécessaire, mais cette fois, c'est nettement moins évident (si ça l'était, le résultat aurait été démontré bien avant 1969 !). Notons que si [3] est vérifiée, il se peut que ce soit  $n$  qui soit à la fois multiple de  $a$  et multiple de  $b$ , et alors  $m$  peut donc n'être multiple ni de  $a$  ni de  $b$ . Nous reviendrons un peu plus loin sur cette condition [3].

Pour voir l'intérêt du résultat de de Bruijn et Klarner, voici quelques exemples de son application. Un argument de coloriage démontre l'impossibilité du pavage du rectangle  $10 \times 14$  par des pavés  $1 \times 4$ , impossibilité vue auparavant. Elle n'est pas étonnante, car le théorème général la