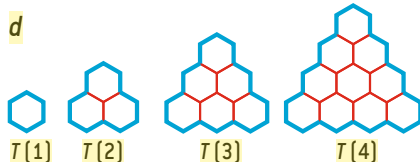


Ce résultat ne concerne pas les rectangles, mais les figures $T(n)$ formées d'hexagones juxtaposés (voir la figure d). J. Conway et J. Lagarias ont montré que $T(n)$ est pavable par des copies de $T(2)$ si $n = 12k$ ou $n = 12k + 2$ ou $n = 12k + 9$ ou $n = 12k + 11$. Dans les autres cas, le pavage de $T(n)$ par $T(2)$ est impossible, mais aucun argument de coloriage n'aboutira.



Pavages par rectangles 1×2 et 1×3

Les pavages par les rectangles 1×2 et 1×3 semblent faciles à obtenir. C'est à la fois vrai et faux. D'une part, d'après un résultat démontré en 1995 par Danièle Beauquier, Maurice Nivat, Eric Remila et Mike Robson, le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles 1×2 placés horizontalement et des rectangles 1×3 placés verticalement ?* est NP-complet. Il s'ensuit qu'on ne connaît aucun algorithme fonctionnant en temps polynomial qui réponde à la question. Les problèmes NP-complets sont considérés comme impossibles à résoudre en pratique : les temps de résolution croissent trop vite quand la valeur des données augmente.

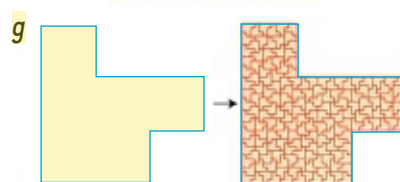
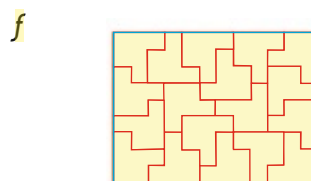
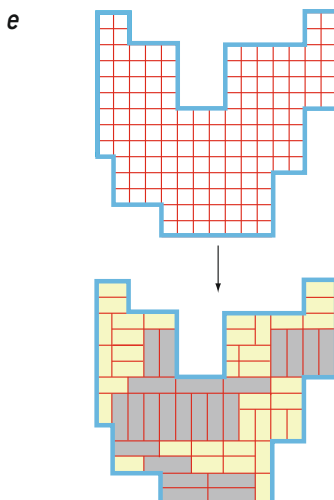
D'autre part, parallèlement au résultat indiquant qu'il est difficile de trouver les pavages envisagés par les rectangles 1×2 et 1×3 , un résultat affirme que ce type de pavage est parfois facile à trouver : si on n'impose plus le positionnement horizontal des rectangles 1×2 et vertical des rectangles 1×3 , alors tout change. E. Remila a établi que le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles 1×2 et 1×3 (sans contrainte d'horizontalité ou de verticalité) ?* se traite en temps proportionnel au nombre de carrés de la figure à paver, c'est-à-dire rapidement (voir la figure e).

Les démonstrations de ces deux résultats sont bien sûr assez délicates et nous

ne les détaillerons pas, mais elles illustrent l'idée que la prise en considération des algorithmes introduit un intéressant renouvellement en géométrie : les mathématiciens étendent toujours les domaines sur lesquels leur curiosité se porte.

Les problèmes de pavage avec des dominos, ou plus généralement des polyminos (formes composées de plusieurs carrés juxtaposés), n'ont pas qu'un intérêt ludique. David Vanderhaeghe, de l'INRIA à Grenoble, et Victor Ostromoukhov, de l'Université de Montréal, ont conçu en 2008 une méthode de représentation graphique fondée sur les pavages de rectangles à l'aide de polyminos permettant un meilleur rendu esthétique. Le découpage d'une image en « pixels » pas trop réguliers et pas trop bien rangés est meilleur que les codages tirés des réseaux totalement réguliers habituels faits de grilles rectangulaires. Partant d'un pavage de rectangles par un polymino fixé (étudiés soigneusement par Michael Reid dans les années 1990), on en déduit un pavage du polymino par lui-même (voir les figures f et g). Ce pavage utilisé plusieurs fois permet de découper facilement tout rectangle en « pixels » irréguliers aussi fins qu'on le souhaite.

Le problème le plus simple concernant le pavage de rectangles par des rectangles et qui généralise celui du rectangle 10×14 cité plus haut est le suivant : *Dans quels cas des copies d'un petit rectangle $a \times b$ remplissent-elles exacte-*



ment un grand rectangle $n \times m$? (n, m, a et b sont des entiers). Les travaux de Nicolaas de Bruijn et David Klarner ont résolu la question en 1969. Le rectangle $n \times m$ peut être recouvert par des rectangles $a \times b$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) nm est multiple de ab ;
- (2) n et m peuvent chacun s'écrire comme une somme de a et de b ;
- (3) (n ou m est multiple de a) et (n ou m est multiple de b).

Paver un rectangle avec des copies d'un même rectangle

Réfléchissons aux trois conditions. La condition (1) est évidemment nécessaire. La condition (2) est elle aussi nécessaire car, si un pavage existe, en suivant le bord de longueur n du rectangle pavé, on trouvera une somme de a et de b donnant n , par exemple $2a + 5b$. De même pour m . La troisième condition est aussi nécessaire, mais cette fois, c'est nettement moins évident (si ça l'était, le résultat aurait été démontré bien avant 1969 !). Notons que si (3) est vérifiée, il se peut que ce soit n qui soit à la fois multiple de a et multiple de b , et alors m peut donc n'être multiple ni de a ni de b . Nous reviendrons un peu plus loin sur cette condition (3).

Pour voir l'intérêt du résultat de de Bruijn et Klarner, voici quelques exemples de son application. Un argument de coloriage démontre l'impossibilité du pavage du rectangle 10×14 par des pavés 1×4 , impossibilité vue auparavant. Elle n'est pas étonnante, car le théorème général la