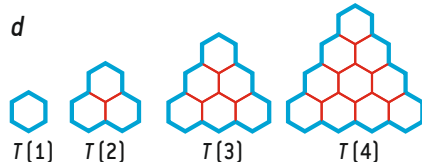


Ce résultat ne concerne pas les rectangles, mais les figures $T(n)$ formées d'hexagones juxtaposés (voir la figure d). J. Conway et J. Lagarias ont montré que $T(n)$ est pavable par des copies de $T(2)$ si $n = 12k$ ou $n = 12k + 2$ ou $n = 12k + 9$ ou $n = 12k + 11$. Dans les autres cas, le pavage de $T(n)$ par $T(2)$ est impossible, mais aucun argument de coloriage n'aboutira.



Pavages par rectangles 1×2 et 1×3

Les pavages par les rectangles 1×2 et 1×3 semblent faciles à obtenir. C'est à la fois vrai et faux. D'une part, d'après un résultat démontré en 1995 par Danièle Beauquier, Maurice Nivat, Eric Remila et Mike Robson, le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles 1×2 placés horizontalement et des rectangles 1×3 placés verticalement ?* est NP-complet. Il s'ensuit qu'on ne connaît aucun algorithme fonctionnant en temps polynomial qui réponde à la question. Les problèmes NP-complets sont considérés comme impossibles à résoudre en pratique : les temps de résolution croissent trop vite quand la valeur des données augmente.

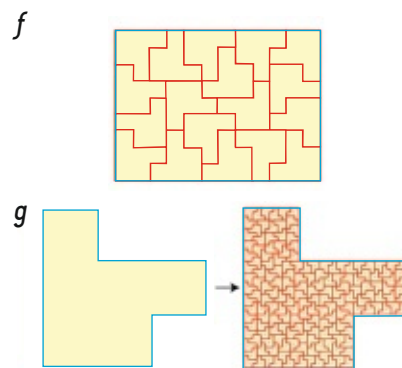
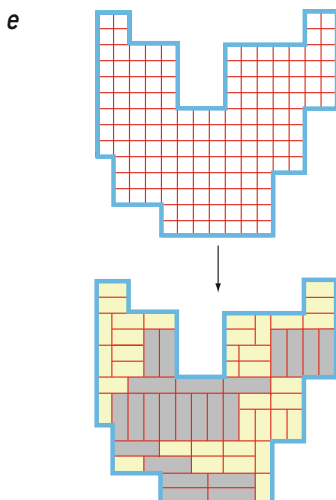
D'autre part, parallèlement au résultat indiquant qu'il est difficile de trouver les pavages envisagés par les rectangles 1×2 et 1×3 , un résultat affirme que ce type de pavage est parfois facile à trouver : si on n'impose plus le positionnement horizontal des rectangles 1×2 et vertical des rectangles 1×3 , alors tout change. E. Remila a établi que le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles 1×2 et 1×3 (sans contrainte d'horizontalité ou de verticalité) ?* se traite en temps proportionnel au nombre de carrés de la figure à paver, c'est-à-dire rapidement (voir la figure e).

Les démonstrations de ces deux résultats sont bien sûr assez délicates et nous

ne les détaillerons pas, mais elles illustrent l'idée que la prise en considération des algorithmes introduit un intéressant renouvellement en géométrie : les mathématiciens étendent toujours les domaines sur lesquels leur curiosité se porte.

Les problèmes de pavage avec des dominos, ou plus généralement des polyminos (formes composées de plusieurs carrés juxtaposés), n'ont pas qu'un intérêt ludique. David Vanderhaeghe, de l'INRIA à Grenoble, et Victor Ostromoukhov, de l'Université de Montréal, ont conçu en 2008 une méthode de représentation graphique fondée sur les pavages de rectangles à l'aide de polyminos permettant un meilleur rendu esthétique. Le découpage d'une image en « pixels » pas trop réguliers et pas trop bien rangés est meilleur que les codages tirés des réseaux totalement réguliers habituels faits de grilles rectangulaires. Partant d'un pavage de rectangles par un polymino fixé (étudiés soigneusement par Michael Reid dans les années 1990), on en déduit un pavage du polymino par lui-même (voir les figures f et g). Ce pavage utilisé plusieurs fois permet de découper facilement tout rectangle en « pixels » irréguliers aussi fins qu'on le souhaite.

Le problème le plus simple concernant le pavage de rectangles par des rectangles et qui généralise celui du rectangle 10×14 cité plus haut est le suivant : *Dans quels cas des copies d'un petit rectangle $a \times b$ remplissent-elles exacte-*



ment un grand rectangle $n \times m$? (n , m , a et b sont des entiers). Les travaux de Nicolaas de Bruijn et David Klarner ont résolu la question en 1969. Le rectangle $n \times m$ peut être recouvert par des rectangles $a \times b$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

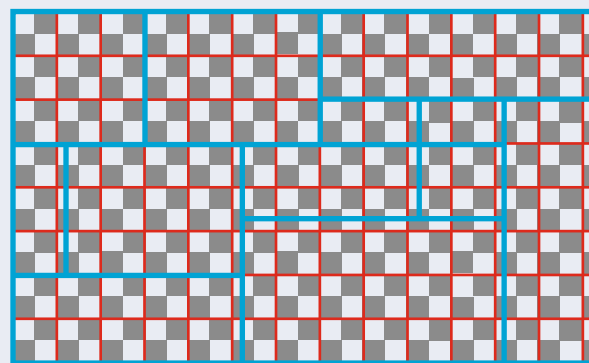
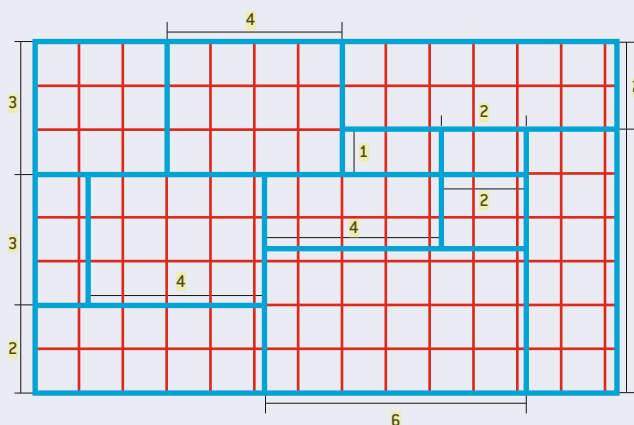
- (1) nm est multiple de ab ;
- (2) n et m peuvent chacun s'écrire comme une somme de a et de b ;
- (3) (n ou m est multiple de a) et (n ou m est multiple de b).

Paver un rectangle avec des copies d'un même rectangle

Réfléchissons aux trois conditions. La condition (1) est évidemment nécessaire. La condition (2) est elle aussi nécessaire car, si un pavage existe, en suivant le bord de longueur n du rectangle pavé, on trouvera une somme de a et de b donnant n , par exemple $2a + 5b$. De même pour m . La troisième condition est aussi nécessaire, mais cette fois, c'est nettement moins évident (si ça l'était, le résultat aurait été démontré bien avant 1969 !). Notons que si (3) est vérifiée, il se peut que ce soit n qui soit à la fois multiple de a et multiple de b , et alors m peut donc n'être multiple ni de a ni de b . Nous reviendrons un peu plus loin sur cette condition (3).

Pour voir l'intérêt du résultat de de Bruijn et Klarner, voici quelques exemples de son application. Un argument de coloriage démontre l'impossibilité du pavage du rectangle 10×14 par des pavés 1×4 , impossibilité vue auparavant. Elle n'est pas étonnante, car le théorème général la

1. Le théorème de transfert

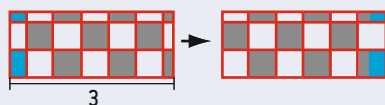


Le théorème de transfert stipule : Si un rectangle est pavé par des rectangles ayant tous au moins un côté de longueur entière, alors lui-même possède au moins un côté de longueur entière.

Démontrons-le. Soit un rectangle de côtés a et b , dont on suppose qu'il est pavé par des tuiles rectangulaires (éventuellement différentes) dont chacune possède au moins un côté de longueur entière. Supposons que ni a ni b ne sont des nombres entiers. Cela va nous conduire à une contradiction et donc à la conclusion recherchée (a ou b est entier).

(1) On dessine un damier sur le grand rectangle en prenant des carrés de côté de longueur $1/2$. On débute le coloriage en damier dans le coin en bas à gauche en y plaçant un carré noir (comme ci-dessus à droite).

Chaque tuile rectangulaire ayant un côté de longueur entière et posée horizontalement ou verticalement sur ce damier recouvre une aire égale de blanc et de noir. En effet, son côté entier correspond exactement à un nombre pair de carreaux du damier (comme illustré ci-dessous).

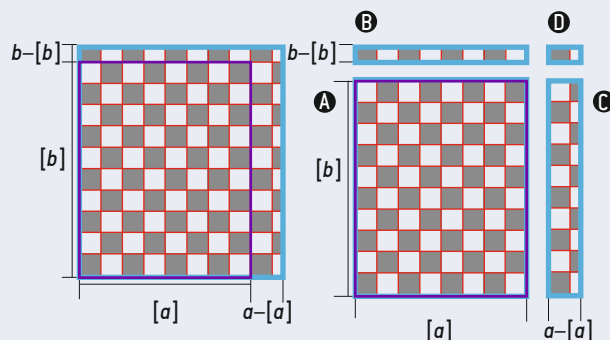


L'hypothèse que le rectangle de côtés a et b est entièrement pavé par des rectangles ayant chacun un côté de longueur entière, donc recouvrant autant de noir que de blanc, entraîne qu'il contient lui-même la même aire en blanc et en noir.

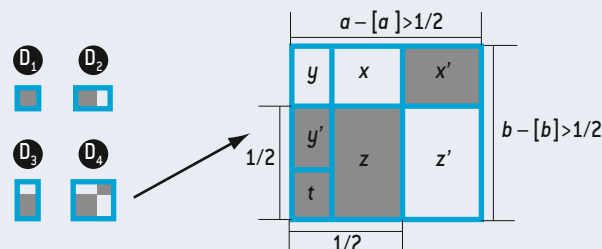
(2) Examinons comment se présente le rectangle dans son ensemble, en faisant apparaître le rectangle de côtés $[a]$ et $[b]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x (ainsi, $[3,14] = 3$). Prenons l'exemple $[a] = 4$ et $[b] = 5$ (ci-contre au milieu). En prolongeant les côtés de ce rectangle contenu dans le rectangle de côtés a et b , on découpe quatre rectangles notés A, B, C et D (voir le dessin). Le rectangle A a une aire blanche égale à l'aire noire, car il est composé de blocs de deux carrés noirs et deux carrés blancs. Il en est de même des rectangles B et C (cela provient, comme en (1), du fait que chacun de ces rectangles a un côté de longueur entière). Reste à étudier le petit rectangle D.

(3) L'hypothèse que ni a ni b ne sont entiers signifie que $[a] < a < [a] + 1$ et $[b] < b < [b] + 1$. Quatre cas sont à considérer selon que la différence

entre a et $[a]$ est inférieure à $1/2$ ou non, et selon que la différence entre b et $[b]$ est inférieure à $1/2$ ou non. Notons-les D_1, D_2, D_3 et D_4 . Nous allons montrer que l'aire noire de chacun de ces rectangles est supérieure à son aire blanche.



Pour les trois premiers, c'est évident. Pour D_4 , il faut y regarder de plus près; mais en découpant D_4 comme le montre la version agrandie de D_4 (ci-dessous), on voit que lui aussi contient plus de noir que de blanc. Sur le dessin, les aires x et x' sont égales, de même que y et y' et z et z' . L'aire de t est donc égale à l'aire noire en excès dans D_4 .



(4) Au total, pour le grand rectangle, l'aire noire est strictement plus grande que l'aire blanche. C'est en contradiction avec la conclusion du paragraphe (1). Il en résulte que l'hypothèse initiale, que ni a ni b n'étaient des entiers, est fautive. Le côté a ou le côté b est entier.