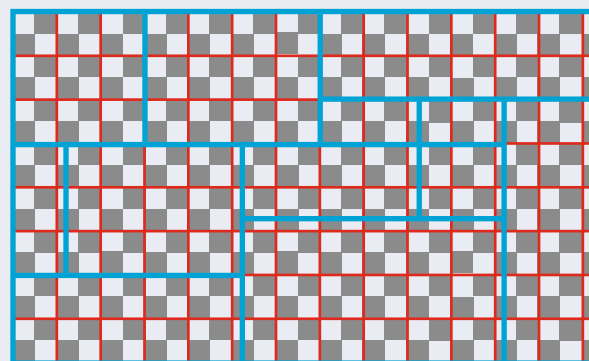
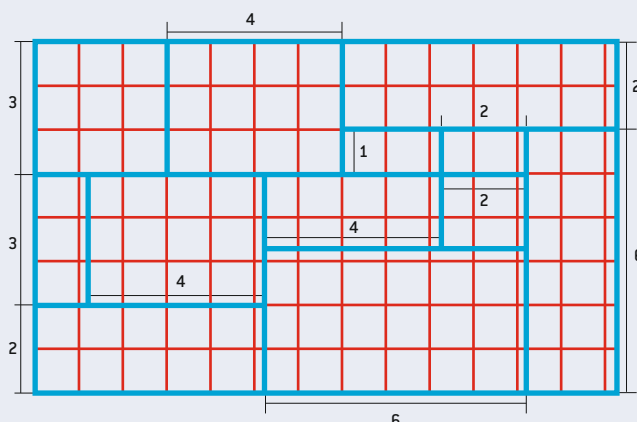


1. Le théorème de transfert

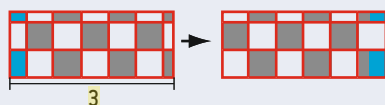


Le théorème de transfert stipule : Si un rectangle est pavé par des rectangles ayant tous au moins un côté de longueur entière, alors lui-même possède au moins un côté de longueur entière.

Démontrons-le. Soit un rectangle de côtés a et b , dont on suppose qu'il est pavé par des tuiles rectangulaires (éventuellement différentes) dont chacune possède au moins un côté de longueur entière. Supposons que ni a ni b ne sont des nombres entiers. Cela va nous conduire à une contradiction et donc à la conclusion recherchée (a ou b est entier).

(1) On dessine un damier sur le grand rectangle en prenant des carrés de côté de longueur $1/2$. On débute le coloriage en damier dans le coin en bas à gauche en y plaçant un carré noir (comme ci-dessus à droite).

Chaque tuile rectangulaire ayant un côté de longueur entière et posée horizontalement ou verticalement sur ce damier recouvre une aire égale de blanc et de noir. En effet, son côté entier correspond exactement à un nombre pair de carreaux du damier (comme illustré ci-dessous).

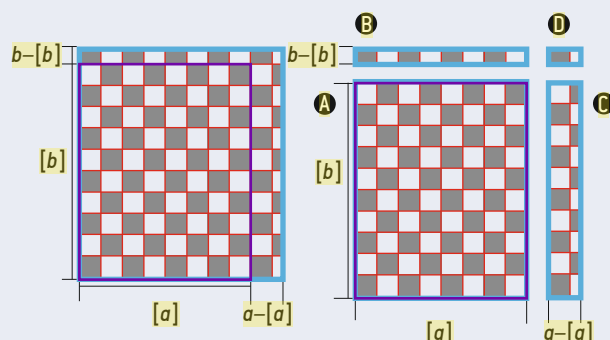


L'hypothèse que le rectangle de côtés a et b est entièrement pavé par des rectangles ayant chacun un côté de longueur entière, donc recouvrant autant de noir que de blanc, entraîne qu'il contient lui-même la même aire en blanc et en noir.

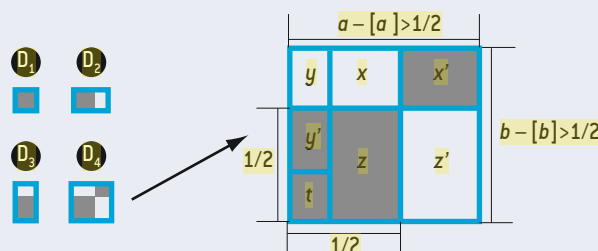
(2) Examinons comment se présente le rectangle dans son ensemble, en faisant apparaître le rectangle de côtés $[a]$ et $[b]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x (ainsi, $[3,14] = 3$). Prenons l'exemple $[a] = 4$ et $[b] = 5$ (ci-contre au milieu). En prolongeant les côtés de ce rectangle contenu dans le rectangle de côtés a et b , on découpe quatre rectangles notés A, B, C et D (voir le dessin). Le rectangle A a une aire blanche égale à l'aire noire, car il est composé de blocs de deux carrés noirs et deux carrés blancs. Il en est de même des rectangles B et C (cela provient, comme en (1), du fait que chacun de ces rectangles a un côté de longueur entière). Reste à étudier le petit rectangle D.

(3) L'hypothèse que ni a ni b ne sont entiers signifie que $[a] < a < [a] + 1$ et $[b] < b < [b] + 1$. Quatre cas sont à considérer selon que la différence

entre a et $[a]$ est inférieure à $1/2$ ou non, et selon que la différence entre b et $[b]$ est inférieure à $1/2$ ou non. Notons-les D_1, D_2, D_3 et D_4 . Nous allons montrer que l'aire noire de chacun de ces rectangles est supérieure à son aire blanche.



Pour les trois premiers, c'est évident. Pour D_4 , il faut y regarder de plus près; mais en découpant D_4 comme le montre la version agrandie de D_4 (ci-dessous), on voit que lui aussi contient plus de noir que de blanc. Sur le dessin, les aires x et x' sont égales, de même que y et y' et z et z' . L'aire de t est donc égale à l'aire noire en excès dans D_4 .

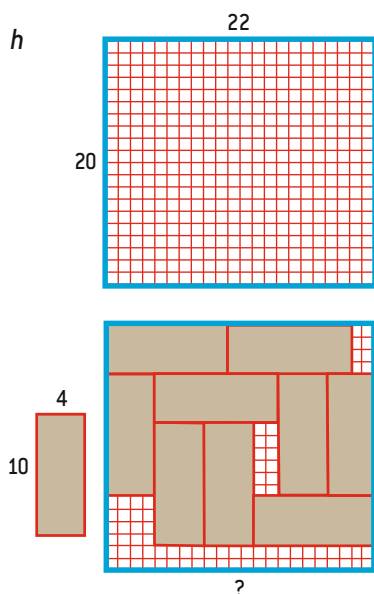


(4) Au total, pour le grand rectangle, l'aire noire est strictement plus grande que l'aire blanche. C'est en contradiction avec la conclusion du paragraphe (1). Il en résulte que l'hypothèse initiale, que ni a ni b n'étaient des entiers, est fautive. Le côté a ou le côté b est entier.

redonne ; la condition (3) n'est pas satisfaite, ni n ni m ne sont multiples de 4.

Le rectangle 16×25 peut-il être pavé par le rectangle 1×10 ? Là encore, (1) et (2) sont vérifiées, mais (3) ne l'est pas. Le pavage est impossible.

Le rectangle 21×11 peut-il être pavé par le rectangle 7×3 ? La condition (1) est vérifiée, la condition (3) aussi, mais pas la condition (2) : 11 n'est pas somme du nombre 7 (pris zéro, une ou plusieurs fois) et du nombre 3 (pris zéro, une ou plusieurs fois). Le pavage est impossible.



Le rectangle 22×20 peut-il être pavé par le rectangle 4×10 (voir la figure h) ? La condition (1) est vérifiée, la condition (3) aussi et la condition (2) est vérifiée, puisque $22 = 10 + 4 + 4 + 4$. Le pavage est possible : trouvez-le !

Transferts de propriété

Pour établir que lorsqu'on veut paver un rectangle $n \times m$ par des rectangles $a \times b$, la condition (3) doit être vérifiée, nous allons utiliser un théorème que nous nommerons « théorème de transfert » :

Si R un rectangle est pavé par une famille de tuiles rectangulaires dont chacune a au moins un de ses côtés de longueur

entière, alors R a au moins, lui aussi, un côté de longueur entière.

Il y a « transfert », des petits rectangles vers le grand rectangle pavé, de la propriété « avoir au moins un côté de longueur entière » que possède chaque petit rectangle du pavage. Ne croyez pas que la démonstration soit évidente (voir l'encadré 1).

Ce résultat est particulièrement intéressant pour de nombreuses raisons. Une première démonstration utilisait un calcul avec des intégrales doubles. En 1985, Hugh Montgomery, sans doute étonné de la difficulté des démonstrations connues, demanda à ses collègues, lors d'une réunion de l'Association américaine de

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

2. Célèbres dissections

Une célèbre question de découpage de rectangle qui a donné lieu à de nombreux travaux est celle de savoir s'il est possible de paver un rectangle (ou un carré) avec des carrés de tailles toutes différentes.

Le site de Stuart Anderson (<http://www.squaring.net/index.html>) vous donnera toutes les informations sur le sujet : histoire, résultats détaillés, recherches récentes. Parmi les variantes du problème, en voici trois.

1. On recherche les carrés pavables par des carrés et tels qu'aucun autre groupement de carrés du pavage ne forme un rectangle. Voici par exemple (ci-contre) le pavage « sans rectangle » du carré 23×23 . Une thèse de doctorat sur le sujet a été soutenue en 1999 à Marseille par Ian Gambini ; elle propose des algorithmes efficaces pour résoudre ce type de problèmes et le travail a permis la découverte de nombreux nouveaux pavages du carré.

Le carré pavable en carrés de tailles différentes ayant le plus petit nombre de carrés en contient 21. Il a été découvert en 1978 par A. Duivestijn, qui a démontré qu'on ne pouvait faire mieux que 21, et que la solution avec 21 carrés était unique.

2. On recherche un pavage du carré par des carrés de tailles différentes, mais, au lieu de se placer sur le plan, Ian Stewart se place sur la surface d'une bande de Moëbius (deux côtés du carré sont collés en inversant le sens) ou d'un tore (les côtés haut et bas, et droit et gauche sont collés sans inverser le sens) : on recolle les côtés en superposant les flèches.

3. Un étonnant résultat a été démontré en 2008 par Frederick Henle et James Henle : il est possible de paver le plan entier avec des carrés de côtés 1, 2, 3, ..., n , ... en utilisant chacun de ces carrés une et une seule fois. Ci-contre, le début (facile) de ce pavage.

