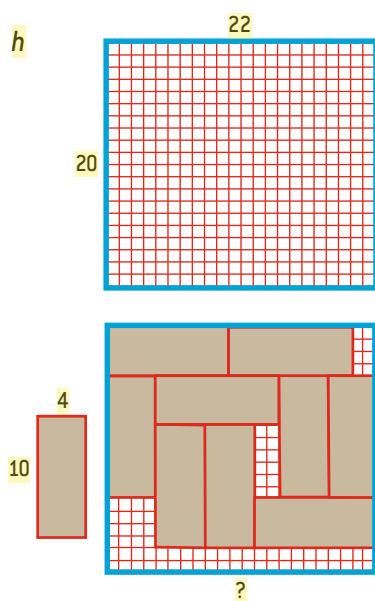


redonne ; la condition (3) n'est pas satisfaite, ni n ni m ne sont multiples de 4.

Le rectangle 16×25 peut-il être pavé par le rectangle 1×10 ? Là encore, (1) et (2) sont vérifiées, mais (3) ne l'est pas. Le pavage est impossible.

Le rectangle 21×11 peut-il être pavé par le rectangle 7×3 ? La condition (1) est vérifiée, la condition (3) aussi, mais pas la condition (2) : 11 n'est pas somme du nombre 7 (pris zéro, une ou plusieurs fois) et du nombre 3 (pris zéro, une ou plusieurs fois). Le pavage est impossible.



Le rectangle 22×20 peut-il être pavé par le rectangle 4×10 (voir la figure h) ? La condition (1) est vérifiée, la condition (3) aussi et la condition (2) est vérifiée, puisque $22 = 10 + 4 + 4 + 4$. Le pavage est possible : trouvez-le !

Transferts de propriété

Pour établir que lorsqu'on veut paver un rectangle $n \times m$ par des rectangles $a \times b$, la condition (3) doit être vérifiée, nous allons utiliser un théorème que nous nommerons « théorème de transfert » :

Si R un rectangle est pavé par une famille de tuiles rectangulaires dont chacune a au moins un de ses côtés de longueur

entière, alors R a au moins, lui aussi, un côté de longueur entière.

Il y a « transfert », des petits rectangles vers le grand rectangle pavé, de la propriété « avoir au moins un côté de longueur entière » que possède chaque petit rectangle du pavage. Ne croyez pas que la démonstration soit évidente (voir l'encadré 1).

Ce résultat est particulièrement intéressant pour de nombreuses raisons. Une première démonstration utilisait un calcul avec des intégrales doubles. En 1985, Hugh Montgomery, sans doute étonné de la difficulté des démonstrations connues, demanda à ses collègues, lors d'une réunion de l'Association américaine de

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

2. Célèbres dissections

Une célèbre question de découpage de rectangle qui a donné lieu à de nombreux travaux est celle de savoir s'il est possible de paver un rectangle (ou un carré) avec des carrés de tailles toutes différentes.

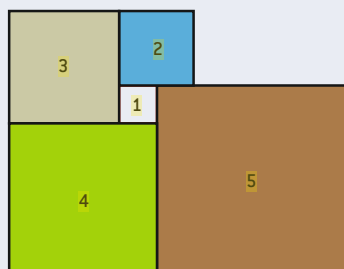
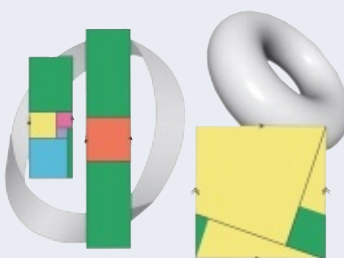
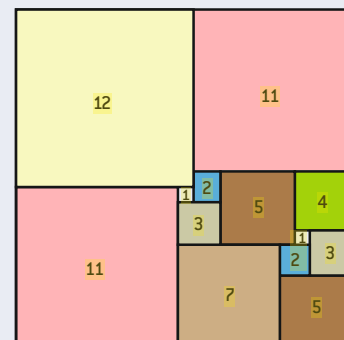
Le site de Stuart Anderson (<http://www.squaring.net/index.html>) vous donnera toutes les informations sur le sujet : histoire, résultats détaillés, recherches récentes. Parmi les variantes du problème, en voici trois.

1. On recherche les carrés pavables par des carrés et tels qu'aucun autre groupement de carrés du pavage ne forme un rectangle. Voici par exemple (ci-contre) le pavage « sans rectangle » du carré 23×23 . Une thèse de doctorat sur le sujet a été soutenue en 1999 à Marseille par Ian Gambini ; elle propose des algorithmes efficaces pour résoudre ce type de problèmes et le travail a permis la découverte de nombreux nouveaux pavages du carré.

Le carré pavable en carrés de tailles différentes ayant le plus petit nombre de carrés en contient 21. Il a été découvert en 1978 par A. Duivestijn, qui a démontré qu'on ne pouvait faire mieux que 21, et que la solution avec 21 carrés était unique.

2. On recherche un pavage du carré par des carrés de tailles différentes, mais, au lieu de se placer sur le plan, Ian Stewart se place sur la surface d'une bande de Moëbius (deux côtés du carré sont collés en inversant le sens) ou d'un tore (les côtés haut et bas, et droit et gauche sont collés sans inverser le sens) : on recolle les côtés en superposant les flèches.

3. Un étonnant résultat a été démontré en 2008 par Frederick Henle et James Henle : il est possible de paver le plan entier avec des carrés de côtés 1, 2, 3, ..., n , ... en utilisant chacun de ces carrés une et une seule fois. Ci-contre, le début (facile) de ce pavage.



mathématiques de trouver des preuves plus simples. Quelques mois plus tard, Stan Wagon publia un article qui proposait 14 démonstrations ! L'une d'elles est donnée dans l'encadré 1. Il faut bien se concentrer, mais c'est une démonstration uniquement graphique... utilisant un coloriage.

Cette collection de démonstrations d'un même résultat pas vraiment évident a été l'occasion de réfléchir à quelques questions que les mathématiciens se posent régulièrement : qu'est-ce qu'une bonne démonstration ? Quelle est la plus belle démonstration d'un résultat donné ? Un accord unanime est-il toujours possible pour désigner la meilleure démonstration ?

Dans le cas du théorème de transfert, la situation est particulièrement riche. Les avis sont partagés sur la meilleure preuve. Certaines preuves sont assez courtes, mais exigent des connaissances préalables que peu de gens possèdent. Certaines preuves se généralisent facilement et sem-

blent donc receler un potentiel intéressant, mais plusieurs généralisations différentes sont envisageables et, du coup, le choix d'une meilleure preuve fondée sur le critère de généralisation ne conduit pas, lui non plus, à une réponse unanime : la notion de meilleure preuve est affaire de goût.

Parmi les généralisations du théorème de transfert pour les rectangles, citons en deux, intéressantes parce qu'elles montrent que, même en géométrie, la théorie des nombres n'est pas loin (ce qu'un autre résultat cité plus loin confirmera). La première est facile, mais pas la seconde.

- Transfert de la propriété « avoir un côté rationnel » : Si R est un rectangle pavé par une famille de tuiles rectangulaires et si chaque tuile du pavage a au moins un côté de longueur rationnelle (c'est-à-dire de la forme p/q où p et q sont des entiers), alors R possède aussi cette propriété.

- Transfert de la propriété « avoir un côté algébrique » : Si R est un rectangle pavé

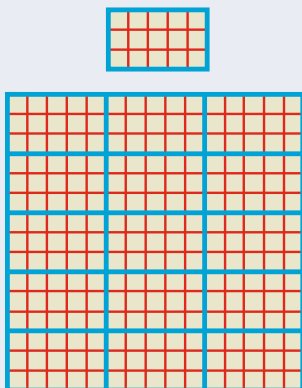
par une famille de tuiles rectangulaires dont chacune a au moins un côté dont la longueur est un nombre algébrique (c'est-à-dire un nombre solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers), alors R possède aussi cette propriété.

Revenons à la propriété (3) rencontrée quand nous avons considéré le problème du pavage d'un rectangle $n \times m$ par des copies du rectangle $a \times b$. Est-il vrai que, si un tel pavage est possible, alors nécessairement d'une part, n ou m est multiple de a et, d'autre part, n ou m est multiple de b ?

Voici le raisonnement qui prouve que oui. Prenons un rectangle $n \times m$ pavé par des copies du rectangle $a \times b$. Opérons la transformation, nommée homothétie, qui réduit toutes les tailles du facteur a . Nous avons maintenant un rectangle $(n/a) \times (m/a)$ pavé par des copies du rectangle $1 \times (b/a)$ qui possède un côté de longueur entière. D'après le théorème de transfert, n/a ou m/a est lui aussi un entier, et donc n ou m est multiple

3. Pavage d'un carré par des rectangles semblables

Un carré de côté 1 étant donné, il est facile de voir que pour tout nombre rationnel p/q (p et q entiers positifs), on peut le paver par des rectangles de proportions $1 \times (p/q)$. Cela résulte de ce qu'on sait paver le carré de côté pq par des rectangles $q \times p$ puisque les trois conditions (1), (2) et (3) du théorème énoncées sont satisfaites. Voici par exemple le pavage pour le rapport $3/5$.



La question se pose alors naturellement de savoir pour quels nombres réels t il existe un pavage du carré 1×1 par des rectangles de proportions $1 \times t$.

D'autres pavages que ceux, très réguliers, qu'on trouve quand on suppose t rationnel sont sans doute envisageables. Peut-on par exemple avoir un pavage de la forme ci-contre à droite, fait de trois rectangles semblables ?

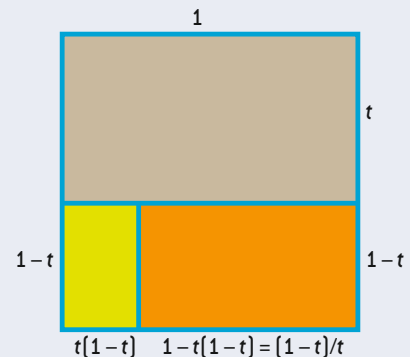
Supposons que c'est possible et notons t le rapport hauteur/longueur des trois rectangles. Le rectangle marron a pour hauteur t . Le rectangle jaune a donc comme côtés $1-t$ et $t(1-t)$. Par soustraction, cela implique que le rectangle orange a pour côtés $1-t(1-t)$ et $1-t$. La construction sera satisfaisante si ce dernier rectangle a les bonnes proportions, c'est-à-dire si :

$$t = (1-t)/(1-t(1-t)),$$

ce qui donne : $t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$.

Il s'agit d'un polynôme de degré 3 possédant une racine réelle unique, qui est 0,569 840 291... C'est donc la proportion qu'il faut donner exactement aux rectangles pour que le pavage du carré soit correct.

Le fait d'être tombé sur un polynôme à coefficients entiers n'est pas un hasard. Tout pavage d'un carré par des rectangles de tailles différentes, mais ayant les mêmes proportions, conduit aussi à découvrir que cette proportion t est solution d'une équation polynomiale à coefficients



entiers. Le plus étonnant est que la réciproque est presque vraie. Chris Freiling, Dan Rinne, Miklos Laczkovich et György Szekeres ont en effet démontré le remarquable résultat suivant :

Un carré peut être pavé par des rectangles semblables à un rectangle $1 \times t$ si et seulement si t est un nombre algébrique (racine d'un polynôme à coefficients entiers) et que toutes les racines de son polynôme minimal ont une partie réelle positive.

La condition « toutes les racines du polynôme minimal ont une partie réelle positive » est un peu mystérieuse ; elle ne semble pas avoir d'interprétation géométrique simple.