

mathématiques de trouver des preuves plus simples. Quelques mois plus tard, Stan Wagon publia un article qui proposait 14 démonstrations ! L'une d'elles est donnée dans l'encadré 1. Il faut bien se concentrer, mais c'est une démonstration uniquement graphique... utilisant un coloriage.

Cette collection de démonstrations d'un même résultat pas vraiment évident a été l'occasion de réfléchir à quelques questions que les mathématiciens se posent régulièrement : qu'est-ce qu'une bonne démonstration ? Quelle est la plus belle démonstration d'un résultat donné ? Un accord unanime est-il toujours possible pour désigner la meilleure démonstration ?

Dans le cas du théorème de transfert, la situation est particulièrement riche. Les avis sont partagés sur la meilleure preuve. Certaines preuves sont assez courtes, mais exigent des connaissances préalables que peu de gens possèdent. Certaines preuves se généralisent facilement et sem-

blent donc recéler un potentiel intéressant, mais plusieurs généralisations différentes sont envisageables et, du coup, le choix d'une meilleure preuve fondée sur le critère de généralisation ne conduit pas, lui non plus, à une réponse unanime : la notion de meilleure preuve est affaire de goût.

Parmi les généralisations du théorème de transfert pour les rectangles, citons en deux, intéressantes parce qu'elles montrent que, même en géométrie, la théorie des nombres n'est pas loin (ce qu'un autre résultat cité plus loin confirmera). La première est facile, mais pas la seconde.

- Transfert de la propriété « avoir un côté rationnel » : Si R est un rectangle pavé par une famille de tuiles rectangulaires et si chaque tuile du pavage a au moins un côté de longueur rationnelle (c'est-à-dire de la forme p/q où p et q sont des entiers), alors R possède aussi cette propriété.

- Transfert de la propriété « avoir un côté algébrique » : Si R est un rectangle pavé

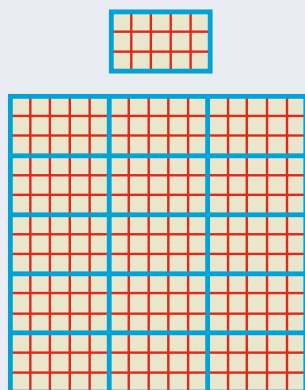
par une famille de tuiles rectangulaires dont chacune a au moins un côté dont la longueur est un nombre algébrique (c'est-à-dire un nombre solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers), alors R possède aussi cette propriété.

Revenons à la propriété [3] rencontrée quand nous avons considéré le problème du pavage d'un rectangle $n \times m$ par des copies du rectangle $a \times b$. Est-il vrai que, si un tel pavage est possible, alors nécessairement d'une part, n ou m est multiple de a et, d'autre part, n ou m est multiple de b ?

Voici le raisonnement qui prouve que oui. Prenons un rectangle $n \times m$ pavé par des copies du rectangle $a \times b$. Opérons la transformation, nommée homothétie, qui réduit toutes les tailles du facteur a . Nous avons maintenant un rectangle $(n/a) \times (m/a)$ pavé par des copies du rectangle $1 \times (b/a)$ qui possède un côté de longueur entière. D'après le théorème de transfert, n/a ou m/a est lui aussi un entier, et donc n ou m est multiple

3. Pavage d'un carré par des rectangles semblables

Un carré de côté 1 étant donné, il est facile de voir que pour tout nombre rationnel p/q (p et q entiers positifs), on peut le paver par des rectangles de proportions $1 \times (p/q)$. Cela résulte de ce qu'on sait paver le carré de côté pq par des rectangles $q \times p$ puisque les trois conditions (1), (2) et (3) du théorème énoncées sont satisfaites. Voici par exemple le pavage pour le rapport $3/5$.



La question se pose alors naturellement de savoir pour quels nombres réels t il existe un pavage du carré 1×1 par des rectangles de proportions $1 \times t$.

D'autres pavages que ceux, très réguliers, qu'on trouve quand on suppose t rationnel sont sans doute envisageables. Peut-on par exemple avoir un pavage de la forme ci-contre à droite, fait de trois rectangles semblables ?

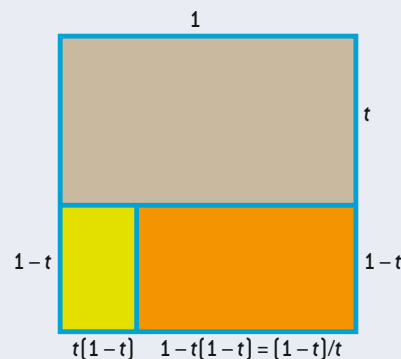
Supposons que c'est possible et notons t le rapport hauteur/longueur des trois rectangles. Le rectangle marron a pour hauteur t . Le rectangle jaune a donc comme côtés $1-t$ et $t(1-t)$. Par soustraction, cela implique que le rectangle orange a pour côtés $1-t(1-t)$ et $1-t$. La construction sera satisfaisante si ce dernier rectangle a les bonnes proportions, c'est-à-dire si :

$$t = (1-t)/(1-t(1-t)),$$

ce qui donne : $t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$.

Il s'agit d'un polynôme de degré 3 possédant une racine réelle unique, qui est 0,569 840 291... C'est donc la proportion qu'il faut donner exactement aux rectangles pour que le pavage du carré soit correct.

Le fait d'être tombé sur un polynôme à coefficients entiers n'est pas un hasard. Tout pavage d'un carré par des rectangles de tailles différentes, mais ayant les mêmes proportions, conduit aussi à découvrir que cette proportion t est solution d'une équation polynomiale à coefficients



entiers. Le plus étonnant est que la réciproque est presque vraie. Chris Freiling, Dan Rinne, Miklos Laczkovich et György Szekeres ont en effet démontré le remarquable résultat suivant :

Un carré peut être pavé par des rectangles semblables à un rectangle $1 \times t$ si et seulement si t est un nombre algébrique (racine d'un polynôme à coefficients entiers) et que toutes les racines de son polynôme minimal ont une partie réelle positive.

La condition « toutes les racines du polynôme minimal ont une partie réelle positive » est un peu mystérieuse ; elle ne semble pas avoir d'interprétation géométrique simple.