

mathématiques de trouver des preuves plus simples. Quelques mois plus tard, Stan Wagon publia un article qui proposait 14 démonstrations ! L'une d'elles est donnée dans l'encadré 1. Il faut bien se concentrer, mais c'est une démonstration uniquement graphique... utilisant un coloriage.

Cette collection de démonstrations d'un même résultat pas vraiment évident a été l'occasion de réfléchir à quelques questions que les mathématiciens se posent régulièrement : qu'est-ce qu'une bonne démonstration ? Quelle est la plus belle démonstration d'un résultat donné ? Un accord unanime est-il toujours possible pour désigner la meilleure démonstration ?

Dans le cas du théorème de transfert, la situation est particulièrement riche. Les avis sont partagés sur la meilleure preuve. Certaines preuves sont assez courtes, mais exigent des connaissances préalables que peu de gens possèdent. Certaines preuves se généralisent facilement et sem-

blent donc receler un potentiel intéressant, mais plusieurs généralisations différentes sont envisageables et, du coup, le choix d'une meilleure preuve fondée sur le critère de généralisation ne conduit pas, lui non plus, à une réponse unanime : la notion de meilleure preuve est affaire de goût.

Parmi les généralisations du théorème de transfert pour les rectangles, citons en deux, intéressantes parce qu'elles montrent que, même en géométrie, la théorie des nombres n'est pas loin (ce qu'un autre résultat cité plus loin confirmera). La première est facile, mais pas la seconde.

- Transfert de la propriété « avoir un côté rationnel » : Si R est un rectangle pavé par une famille de tuiles rectangulaires et si chaque tuile du pavage a au moins un côté de longueur rationnelle (c'est-à-dire de la forme p/q où p et q sont des entiers), alors R possède aussi cette propriété.

- Transfert de la propriété « avoir un côté algébrique » : Si R est un rectangle pavé

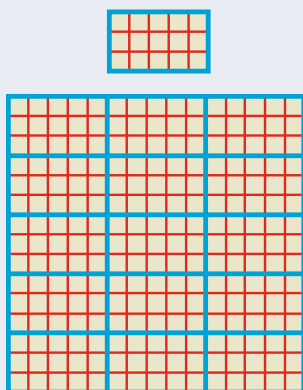
par une famille de tuiles rectangulaires dont chacune a au moins un côté dont la longueur est un nombre algébrique (c'est-à-dire un nombre solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers), alors R possède aussi cette propriété.

Revenons à la propriété (3) rencontrée quand nous avons considéré le problème du pavage d'un rectangle $n \times m$ par des copies du rectangle $a \times b$. Est-il vrai que, si un tel pavage est possible, alors nécessairement d'une part, n ou m est multiple de a et, d'autre part, n ou m est multiple de b ?

Voici le raisonnement qui prouve que oui. Prenons un rectangle $n \times m$ pavé par des copies du rectangle $a \times b$. Opérons la transformation, nommée homothétie, qui réduit toutes les tailles du facteur a . Nous avons maintenant un rectangle $(n/a) \times (m/a)$ pavé par des copies du rectangle $1 \times (b/a)$ qui possède un côté de longueur entière. D'après le théorème de transfert, n/a ou m/a est lui aussi un entier, et donc n ou m est multiple

3. Pavage d'un carré par des rectangles semblables

Un carré de côté 1 étant donné, il est facile de voir que pour tout nombre rationnel p/q (p et q entiers positifs), on peut le paver par des rectangles de proportions $1 \times (p/q)$. Cela résulte de ce qu'on sait paver le carré de côté p/q par des rectangles $q \times p$ puisque les trois conditions (1), (2) et (3) du théorème énoncées sont satisfaites. Voici par exemple le pavage pour le rapport $3/5$.



La question se pose alors naturellement de savoir pour quels nombres réels t il existe un pavage du carré 1×1 par des rectangles de proportions $1 \times t$.

D'autres pavages que ceux, très réguliers, qu'on trouve quand on suppose t rationnel sont sans doute envisageables. Peut-on par exemple avoir un pavage de la forme ci-contre à droite, fait de trois rectangles semblables ?

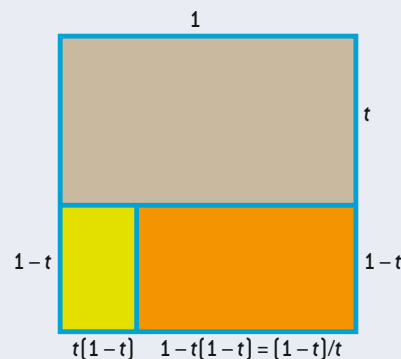
Supposons que c'est possible et notons t le rapport hauteur/longueur des trois rectangles. Le rectangle marron a pour hauteur t . Le rectangle jaune a donc comme côtés $1-t$ et $t(1-t)$. Par soustraction, cela implique que le rectangle orange a pour côtés $1-t(1-t)$ et $1-t$. La construction sera satisfaisante si ce dernier rectangle a les bonnes proportions, c'est-à-dire si :

$$t = (1-t)/(1-t(1-t)),$$

ce qui donne : $t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$.

Il s'agit d'un polynôme de degré 3 possédant une racine réelle unique, qui est 0,569 840 291... C'est donc la proportion qu'il faut donner exactement aux rectangles pour que le pavage du carré soit correct.

Le fait d'être tombé sur un polynôme à coefficients entiers n'est pas un hasard. Tout pavage d'un carré par des rectangles de tailles différentes, mais ayant les mêmes proportions, conduit aussi à découvrir que cette proportion t est solution d'une équation polynomiale à coefficients



entiers. Le plus étonnant est que la réciproque est presque vraie. Chris Freiling, Dan Rinne, Miklos Laczkovich et György Szekeres ont en effet démontré le remarquable résultat suivant :

Un carré peut être pavé par des rectangles semblables à un rectangle $1 \times t$ si et seulement si t est un nombre algébrique (racine d'un polynôme à coefficients entiers) et que toutes les racines de son polynôme minimal ont une partie réelle positive.

La condition « toutes les racines du polynôme minimal ont une partie réelle positive » est un peu mystérieuse ; elle ne semble pas avoir d'interprétation géométrique simple.

de a . De même, n ou m est un multiple de b . C'est ce que nous voulions obtenir.

Découpage du carré et trisections

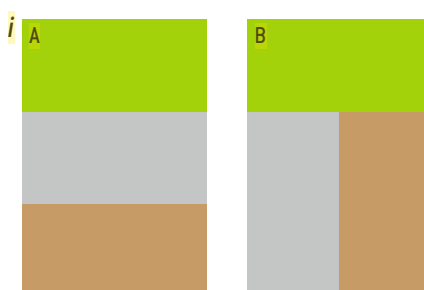
Un étonnant résultat, démontré indépendamment par C. Freiling et D. Rinne en 1994, puis par M. Laczkovich et G. Szekeres en 1995, affirme qu'un simple problème de pavage par des rectangles conduit inéluctablement à considérer l'idée de nombre algébrique (nombre solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, tel $\sqrt{2}$ qui est solution de $x^2 = 2$), et la notion de polynôme minimal : le polynôme de plus petit degré dont x (un nombre algébrique) est solution. Voici ce remarquable résultat où les rectangles nous précipitent vers la théorie des nombres :

Un carré peut être pavé par des rectangles semblables à un rectangle $1 \times t$ si et seulement si t est un nombre algébrique et si toutes les racines de son polynôme minimal (certaines sont peut-être des nombres complexes) ont une partie réelle positive [voir l'encadré 3].

Notons les étranges conséquences de ce théorème : un carré ne peut pas être pavé par des rectangles de proportions $1 \times \sqrt[3]{2}$, alors qu'on peut le paver par des rectangles de proportions $1 \times (1 + \sqrt[3]{2})$. En effet, d'une part, le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $x^3 = 2$, dont les deux racines complexes ont une partie réelle négative ; d'autre part, le polynôme minimal de $(1 + \sqrt[3]{2})$ est $(x - 1)^3 = 2$, dont les racines complexes ont une partie réelle positive.

Parmi les énoncés simples concernant les rectangles, un singulier et amusant théorème a été démontré en 1992 par Samuel Maltby. Imaginons que l'on souhaite découper un champ rectangulaire en trois parties superposables (c'est-à-dire ayant exactement la même forme, et donc la même aire). Est-ce possible ? Il y a bien sûr le découpage A (voir la figure i), qui convient pour tout rectangle (et dont l'idée se généralise pour découper un rectangle en n parties superposables, pour tout $n \geq 1$). Lorsque le rapport entre la hauteur et la largeur est $3/2$, il y a aussi le découpage B.

Le théorème de Maltby, dont la démonstration occupe une bonne dizaine de pages, affirme qu'aucune « trisection du rectangle » autre que ces deux méthodes évidentes n'est possible. Le propriétaire d'un champ rectangulaire qui veut faire un partage parfaitement équitable de son champ entre ses trois enfants est obligé de leur laisser des rectangles !



Découpage en triangles de même aire

Terminons cette petite exploration (partielle) des résultats récents concernant le rectangle par le difficile (et pourtant simple à énoncer) théorème de Paul Monsky :

Si un carré (ou un rectangle) est pavé par des triangles de même aire, alors le nombre de triangles est pair.

Ce résultat qui date de 1970 a été généralisé en 1999 par Sherman Stein à tout polymino composé d'un nombre impair de carrés. Il établit donc l'impossibilité de découper chaque élément de cette famille infinie de formes en un nombre impair de triangles de même aire... ce qui semble mystérieux !

Il y a deux mois, nous avons indiqué dans cette rubrique qu'une exposition de tableaux monochromes pouvait devenir intéressante en retournant les tableaux contre les murs, car les problèmes d'accrochage sont riches en énigmes mathématiques. Maintenant, pour vous adonner à la contemplation et à la méditation mathématiques, vous savez qu'il n'est même pas nécessaire de retourner les tableaux : le rectangle du cadre, à lui tout seul, est une source inépuisable d'inspiration. ■

BIBLIOGRAPHIE

S. Anderson, *Tiling by squares*, 2012, www.squaring.net/index.html

B. Sury, *Group theory and tiling problems*, *Symmetry: A Multi-Disciplinary Perspective*, vol. 16, pp. 97-117, 2011.

F. Ardila et R. Stanley, *Tilings*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(4), pp. 32-43, 2010.

C. Freiling et al., *Rectangling a rectangle*, *Discrete & Computational Geometry*, vol. 17(2), pp. 217-225, 1997.

M. Reid, *Tiling rectangles and half strips with congruent polyominoes*, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 80(1), pp. 106-123, 1997.

J. H. Conway et J. C. Lagarias, *Tiling with polyominoes and combinatorial group theory*, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 53, pp. 183-208, 1990.

S. Wagon, *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*, *Amer. Math. Monthly*, vol. 94, pp. 601-617, 1987.