

de a . De même, n ou m est un multiple de b . C'est ce que nous voulions obtenir.

Découpage du carré et trisections

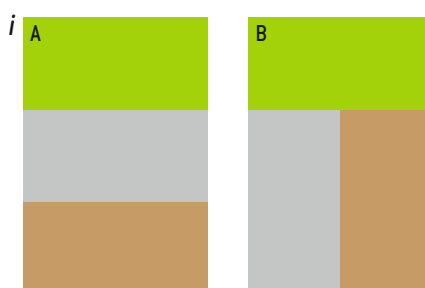
Un étonnant résultat, démontré indépendamment par C. Freiling et D. Rinne en 1994, puis par M. Laczkovich et G. Szekeres en 1995, affirme qu'un simple problème de pavage par des rectangles conduit inéluctablement à considérer l'idée de nombre algébrique (nombre solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, tel $\sqrt{2}$ qui est solution de $x^2 = 2$), et la notion de polynôme minimal : le polynôme de plus petit degré dont x (un nombre algébrique) est solution. Voici ce remarquable résultat où les rectangles nous précipitent vers la théorie des nombres :

Un carré peut être pavé par des rectangles semblables à un rectangle $1 \times t$ si et seulement si t est un nombre algébrique et si toutes les racines de son polynôme minimal (certaines sont peut-être des nombres complexes) ont une partie réelle positive [voir l'encadré 3].

Notons les étranges conséquences de ce théorème : un carré ne peut pas être pavé par des rectangles de proportions $1 \times \sqrt[3]{2}$, alors qu'on peut le paver par des rectangles de proportions $1 \times (1 + \sqrt[3]{2})$. En effet, d'une part, le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $x^3 = 2$, dont les deux racines complexes ont une partie réelle négative ; d'autre part, le polynôme minimal de $(1 + \sqrt[3]{2})$ est $(x - 1)^3 = 2$, dont les racines complexes ont une partie réelle positive.

Parmi les énoncés simples concernant les rectangles, un singulier et amusant théorème a été démontré en 1992 par Samuel Maltby. Imaginons que l'on souhaite découper un champ rectangulaire en trois parties superposables (c'est-à-dire ayant exactement la même forme, et donc la même aire). Est-ce possible ? Il y a bien sûr le découpage A (voir la figure i), qui convient pour tout rectangle (et dont l'idée se généralise pour découper un rectangle en n parties superposables, pour tout $n \geq 1$). Lorsque le rapport entre la hauteur et la largeur est $3/2$, il y a aussi le découpage B.

Le théorème de Maltby, dont la démonstration occupe une bonne dizaine de pages, affirme qu'aucune « trisection du rectangle » autre que ces deux méthodes évidentes n'est possible. Le propriétaire d'un champ rectangulaire qui veut faire un partage parfaitement équitable de son champ entre ses trois enfants est obligé de leur laisser des rectangles !



Découpage en triangles de même aire

Terminons cette petite exploration (partielle) des résultats récents concernant le rectangle par le difficile (et pourtant simple à énoncer) théorème de Paul Monsky :

Si un carré (ou un rectangle) est pavé par des triangles de même aire, alors le nombre de triangles est pair.

Ce résultat qui date de 1970 a été généralisé en 1999 par Sherman Stein à tout polymino composé d'un nombre impair de carrés. Il établit donc l'impossibilité de découper chaque élément de cette famille infinie de formes en un nombre impair de triangles de même aire... ce qui semble mystérieux !

Il y a deux mois, nous avons indiqué dans cette rubrique qu'une exposition de tableaux monochromes pouvait devenir intéressante en retournant les tableaux contre les murs, car les problèmes d'accrochage sont riches en énigmes mathématiques. Maintenant, pour vous adonner à la contemplation et à la méditation mathématiques, vous savez qu'il n'est même pas nécessaire de retourner les tableaux : le rectangle du cadre, à lui tout seul, est une source inépuisable d'inspiration. ■

BIBLIOGRAPHIE

S. Anderson, *Tiling by squares*, 2012, www.squaring.net/index.html

B. Sury, *Group theory and tiling problems*, *Symmetry: A Multi-Disciplinary Perspective*, vol. 16, pp. 97-117, 2011.

F. Ardila et R. Stanley, *Tilings*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(4), pp. 32-43, 2010.

C. Freiling et al., *Rectangling a rectangle*, *Discrete & Computational Geometry*, vol. 17(2), pp. 217-225, 1997.

M. Reid, *Tiling rectangles and half strips with congruent polyominoes*, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 80(1), pp. 106-123, 1997.

J. H. Conway et J. C. Lagarias, *Tiling with polyominoes and combinatorial group theory*, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 53, pp. 183-208, 1990.

S. Wagon, *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*, *Amer. Math. Monthly*, vol. 94, pp. 601-617, 1987.

 ART & SCIENCE

La table qui se prenait pour un manuel de géologie

En remerciement de ses bons offices, l'électeur de Saxe Frédéric-Auguste III a offert au baron de Breteuil une table qui est aussi un cabinet de minéralogie : elle révèle la diversité des ressources géologiques de la Saxe.

Loïc MANGIN

Le 30 décembre 1777, Maximilien-Joseph, dit « Le Bon », électeur de Bavière, meurt sans descendant. Son héritier légitime est Charles-Théodore de Sulzbach, mais d'autres prétendants se manifestent, dont l'électeur de Saxe Frédéric-Auguste III et l'empereur Joseph II. La Prusse et la Russie sont aussi de la partie et la guerre menace. De son côté, le roi de France, Louis XVI, s'inquiète et multiplie les initiatives diplomatiques. Début 1779, tous les acteurs se rassemblent à Teschen, aujourd'hui au Sud de la Pologne. Au cœur des négociations, le baron de Breteuil, ambassadeur français à Vienne, et le prince russe Repnine. Et enfin, le 13 mai 1779 est signé un traité de paix. Le rôle de Breteuil fut si prépondérant que beaucoup souhaitèrent le remercier.

Il reçut de Frédéric-Auguste III une table (voir la photographie, page ci-contre), visible cet automne à la Galerie J. Kugel, à Paris. Elle fut confectionnée par l'orfèvre Johann Christian Neuber (1735-1808). Ce dernier était déjà célèbre pour son travail de lapidaire qu'il appliquait à différents objets en vogue à la fin du XVIII^e siècle. Les plus réputés sont des « galaneries » (carnets de bal, étuis à cire...) et des tabatières. Neuber utilisait la technique de mosaïque en cloisonné (les pièces sont enchâssées dans un cadre en métal). Sa renommée grandit encore quand il inventa les « tabatières formant cabinet minéralogique » : l'idée était de flatter l'intérêt naissant pour les sciences, et notamment la minéralogie, en insérant dans la mosaïque divers échantillons de roches et de minéraux sélectionnés pour leur qualité (beauté, rareté...). Chaque tabatière était

accompagnée d'un manuel énumérant la nature et l'origine des minéraux employés.

Ce principe a également été choisi pour l'élaboration de la table, à un changement d'échelle près : les tabatières ont au plus 10 centimètres de longueur, alors que la table a un diamètre de 71 centimètres ! Le plateau de la table est lui aussi un cabinet minéralogique rassemblant 128 échantillons (sous la forme de plaquettes) numérotés et dûment décrits dans un livret fourni avec le meuble, glissé dans un tiroir discret. Klaus Thalheim, conservateur au musée de minéralogie et de géologie de Dresde, en Allemagne, a étudié cette table dite de Breteuil.

Inserées dans la table de Breteuil, les pierres les plus célèbres de Saxe sont les topazes de Schneckenstein.

Neuber a voulu montrer la diversité des roches et des minéraux que recèle la Saxe. On trouve beaucoup de calcédoines (composés entre autres de silice) sous la forme de plusieurs variétés, tels l'agate, le jaspe, la cornaline... On peut aussi repérer des pierres fines (topaze, grenat...) ainsi qu'une perle (pièce n° 1) rassemblées autour du médaillon central.

Cependant, les connaissances de l'époque ne lui permirent pas d'identifier tous les échantillons retenus qui, de par la taille requise, devaient provenir des plus beaux spécimens de sa propre collection. Ainsi, dans le livret, on note 11 fois le terme « caillou ». Par ailleurs, certains minéraux ont été mal

interprétés. Par exemple, la pièce numérotée 2 est selon Neuber une aigue-marine, alors qu'il s'agit d'une topaze bleu clair. Les deux minéraux sont bien des silicates, mais le premier (de formule $\text{Be}_3\text{Al}_2\text{Si}_6\text{O}_{18}$) se distingue du second (de formule $\text{Al}_2\text{SiO}_4(\text{F},\text{OH})_2$) par la présence de béryllium (Be). De même, l'échantillon 10, noté « Crisolite » par Neuber, est également une topaze (verte).

À la fin du XVIII^e siècle, le géologue le plus influent en Europe était Abraham Werner, installé à Freiberg, en Saxe. Il avait mis au point une classification des minéraux fondée sur leur couleur, leur brillance... Neuber s'est sans doute inspiré de ces travaux en privilégiant des dénominations descriptives. Toutefois, la géologie n'était pas encore une science fixée et plusieurs systèmes étaient en usage.

La plupart des échantillons ont pu être identifiés d'après les critères de classification actuels par K. Thalheim, à l'exception de quatre plaquettes pour lesquelles les indications sont insuffisantes. Les pierres les plus célèbres de Saxe sont les topazes de Schneckenstein, à proximité de la frontière tchèque (5, 8, 10 et 16) : il y a 310 millions d'années, du magma de granite s'est introduit dans des schistes, ce qui a conduit, après un phénomène nommé pneumatolyse, à la formation d'un quartz-tourmaline contenant ces topazes. La table, conservée au château de Breteuil, dans les Yvelines, est désormais un précieux manuel de minéralogie. ■

« Le luxe, le goût, la science... », Neuber, orfèvre minéralogiste à la cour de Saxe, du 13 septembre au 10 novembre 2012, à la Galerie J. Kugel, 25, quai Anatole France, 75007 Paris. L'application Neuber pour iPad est disponible gratuitement.