

HISTOIRE DES SCIENCES

Les multiples ancêtres du jeu de *Nim*

Piquet des cavaliers, Tiouk-Tiouk... Dès le XVI^e siècle en Europe, mais aussi en Afrique, se sont répandues diverses versions du jeu de *Nim*, un jeu numérique simple qui fournit, au début du XX^e siècle, les bases de la théorie des jeux combinatoires.

Lisa ROUGETET

Vous êtes assis face à votre adversaire. Une table où reposent trois tas d'allumettes vous sépare. Votre adversaire vient de jouer et vous laisse la configuration 7-5-3 : sept allumettes dans le premier tas, cinq dans le deuxième et trois dans le troisième. À tour de rôle, vous ne pouvez retirer d'allumettes (au minimum une) que d'une seule pile. Votre objectif est de prendre la (ou les) dernière(s) allumette(s). Par une diminution adéquate, vous pouvez vous placer en position gagnante et remporter la partie ; que faites-vous ?

Ce jeu nommé *Nim* doit son appellation au mathématicien américain Charles Bouton, qui publia en 1901 un article dans *The Annals of Mathematics* intitulé « *Nim, a game with a complete mathematical theory* » (*Nim*, un jeu avec une théorie mathématique com-

plète). Pour la première fois, ce jeu combinatoire impartial, c'est-à-dire où le hasard n'intervient pas et où les mouvements possibles sont les mêmes pour les deux joueurs, était résolu non seulement dans un cas particulier (la configuration 9-5-12), mais aussi dans le cas général (avec un nombre quelconque de tas), le tout formalisé mathématiquement (voir l'encadré page 82).

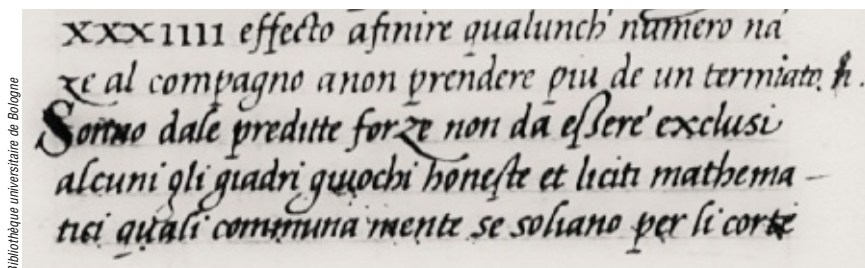
Depuis, l'article de Bouton est considéré comme l'élément déclencheur de la théorie mathématique des jeux combinatoires. Il constitue le point de départ de multiples recherches consacrées à la résolution de jeux de plus en plus compliqués avec des avancées toujours plus spectaculaires, comme la résolution du jeu de Dames anglaises en 2007 par l'équipe canadienne de Jonathan Schaeffer. Lorsque Bouton s'est intéressé au jeu de *Nim*, celui-ci existait déjà

depuis plusieurs siècles sous diverses formes, parfois assez éloignées. Présenté aux XVI^e et XVII^e siècles dans les premiers ouvrages de récréations mathématiques – des recueils qui rassemblent, aujourd'hui encore, des problèmes mathématiques amusants et leur solution – ou pratiqué dans des villages d'Afrique de l'Ouest, ce jeu était l'apanage d'une élite.

Une recette pour gagner à tous les coups

C'est dans l'ouvrage *De viribus quantitatis* du moine franciscain italien Fra Luca Pacioli publié en 1508, un des premiers recueils de récréations mathématiques, qu'apparaît l'ancêtre européen le plus ancien connu à ce jour du jeu de *Nim*. Dans l'effet XXXVIII, Pacioli confronte le lecteur au problème suivant : « Finir [le jeu] avant son compagnon, quel que soit le nombre, et sans prendre plus qu'un nombre limité. » Cet énoncé sibyllin prend tout son sens dans la résolution que donne ensuite Pacioli : il propose à deux personnes d'atteindre le nombre 30 en additionnant à tour de rôle des chiffres compris entre 1 et 6.

Il s'agit ici d'une version simplifiée du jeu de *Nim* correspondant au cas à un seul tas contenant 30 objets dont on ne peut prélever plus de 6 éléments par tour. Le jeu est énoncé sous une forme additive, où l'on ajoute des chiffres au lieu de diminuer des



1. L'EFFET XXXVIII DE L'OUVRAGE DE VIRIBUS QUANTITATIS du mathématicien Fra Luca Pacioli (1508). Le moine italien y énonce une version du jeu de *Nim* – la plus ancienne variante européenne connue à ce jour : « Finir [le jeu] avant son compagnon quel que soit le nombre, et sans prendre plus qu'un nombre limité. » Il explique ensuite que ce jeu fait partie des jeux mathématiques amusants, honnêtes et légitimes qui ont toute leur place dans les cours et auxquels tout le monde peut s'adonner comme récréation mathématique.

tas. Pour gagner, explique Pacioli, il faut atteindre des paliers que l'on détermine par le raisonnement rétrograde suivant : si je ne veux pas que mon adversaire gagne, je dois lui proposer le plus grand nombre tel qu'en lui ajoutant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 il ne puisse atteindre 30. Ce nombre est 23. En effet, quel que soit le chiffre qu'il ajoute à 23, il obtiendra un nombre supérieur ou égal à 24, mais inférieur ou égal à 29. Je pourrai alors compléter la somme jusqu'à 30 au tour suivant. En raisonnant de la même façon avec 23, on trouve que le nouveau palier de sûreté est 16, puis 9, puis 2. Ainsi, selon qui entame la partie, je dois m'arranger pour atteindre le premier un de ces paliers, puis les autres, et ce jusqu'à 30.

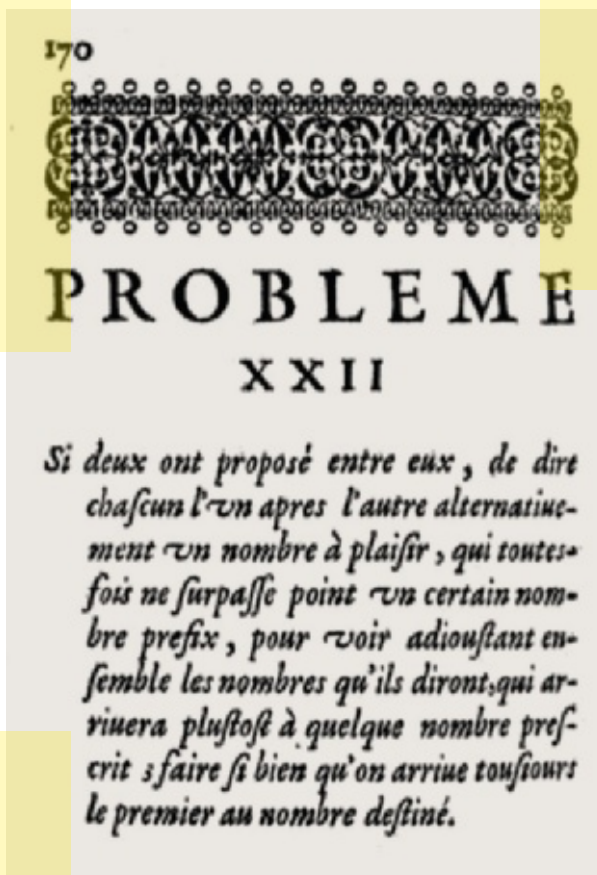
L'ouvrage de Pacioli est une collection de jeux ou récréations mathématiques de ce type, où l'auteur souhaite enseigner les mathématiques en évitant la lassitude d'exercices répétés. C'est le premier ouvrage entièrement consacré à des jeux et récréations. Avant Pacioli, ces problèmes étaient introduits occasionnellement dans les ouvrages mathématiques, à titre de pause pédagogique.

En 1612, le premier recueil imprimé de récréations mathématiques est publié sous le titre *Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres*. Il est l'œuvre du mathématicien et traducteur français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, qui sera aussi connu quelques années plus tard pour sa publication du texte grec de l'*Arithmétique* de Diophante (III^e siècle), accompagné d'une traduction latine. Bachet participe en effet d'un vaste mouvement de transmission des œuvres des Anciens qui a débuté en 1480 et est destiné à rendre plus accessibles les textes des mathématiciens grecs. Le problème XXII de son recueil de récréations mathématiques propose une version du jeu de *Nim* similaire à celle énoncée par Pacioli.

Bachet considère le cas où les deux personnes doivent atteindre 100 en sommant à tour de rôle des nombres compris entre 1 et 10. Il donne les positions qu'il faut obtenir pour être sûr de gagner, en prenant soin d'expliquer la règle – « infaillible et parfaitement démontrée » – à appliquer pour les obtenir. Néanmoins, il reconnaît que « ce

face à un adversaire ignorant « la finesse du jeu », de brouiller les pistes en ne cherchant pas systématiquement les paliers de sûreté : « Ne pas prendre toujours tous les nombres remarquables et nécessaires, pour gagner infailliblement, car faisant ainsi tu découvriras trop l'artifice, et s'il est homme de bon esprit il remarquera tout incontinent ces nombres-là, voyant que tu choisis toujours les mêmes, mais au commencement tu peux dire à la volée des autres nombres, jusques à ce que tu approches du nombre destiné, car alors tu pourras subtilement accrocher quelque'un des nombres nécessaires de peur d'être surpris. » À bon entendeur...

Ces conseils sont révélateurs du cadre dans lequel se pratiquent les récréations mathématiques de l'époque. Bachet a précisé, dans le titre de son ouvrage, que ses problèmes plaisants seront « très utiles pour toute sorte de personnes curieuses qui se servent d'arithmétique ». De façon générale, les récréations mathématiques s'adressent à un nombre restreint de personnes, à des élites intellectuelles curieuses (et ayant les moyens financiers de se procurer les ouvrages) qui s'intéressent à des problèmes mathématiques ludiques, mais instructifs.



2. LE PROBLÈME XXII des *Problèmes plaisants et délectables* du mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, ici dans l'édition de 1624, présente une version en français du jeu de *Nim* similaire à celle de Pacioli.

n'est pas règle générale, car si l'on changeait le nombre destiné, à savoir 100, ou le nombre qu'on ne peut passer, à savoir 10, la chose pourrait aller autrement ». Ce qu'il montre en donnant d'autres exemples avec 120 ou en ne prenant que des nombres compris entre 1 et 9.

On voit déjà apparaître la notion de stratégie optimale qui assure une victoire certaine au joueur initié. Bachet conseille même,

L'astuce du cavalier

De nombreux ouvrages dans la veine des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet se succèdent tout au long des XVII^e et XVIII^e siècles (notamment après la publication, en 1624, de la *Récréation mathématique* du Jésuite Jean Leurechon, maintes fois reprise et enrichie) et propagent en Europe la version additive du jeu de *Nim*. On la retrouve notamment en 1749 dans *Les amusements mathématiques* du Lillois André-Joseph Panckoucke, sous un problème intitulé *Le piquet des cavaliers*.

Nehmen, nimm, Nim !

Pourquoi le nom *Nim* ? Un lien avec le jeu d'origine chinoise *Fan-Tan* est souvent invoqué, mais à tort, le *Fan-Tan* étant un jeu où intervient le hasard. Selon le mathématicien Alan Ross, qui publia à ce sujet une courte note dans la *Mathematical Gazette* de mai 1953, l'explication la plus probable serait que *Nim* provienne de l'impératif *nimm* du verbe allemand *nehmen* qui signifie prendre ; Bouton aurait choisi ce nom en souvenir de ses années d'études à Leipzig où il a obtenu son doctorat. Dans le numéro de décembre 1953, Joseph Walsh, élève puis collègue de Bouton à l'Université Harvard, confirma l'origine allemande du mot *Nim*, le verbe prendre étant fréquemment employé durant une partie de jeu.

Plus romancé, l'énoncé met en scène deux amis voyageant à cheval. « L'un propose à l'autre un cent de piquet sans cartes [dans ce jeu de cartes, les joueurs amassent des points en fonction de leur main, et le premier qui a 100 points a gagné]. Ils conviennent : 1°. Celui qui arrivera le premier à 100 sera défrayé de souper, 2°. Qu'ils ne pourront prendre alternativement plus de 10 à la fois. » Panckoucke explique ensuite brièvement la stratégie à adopter pour tranquillement poser les pieds sous la table sans être de corvée d'épluchage...

Le Tiouk-Tiouk africain : un Nim déguisé

Dans un tout autre contexte historique et géographique, le *Tiouk-Tiouk*, un jeu de quadrillage africain, se ramène simplement à une configuration du *Nim* de Bouton. Ce jeu a été répertorié en 1955 par Charles Bréart, directeur d'école en Afrique tropicale, dans un ouvrage intitulé *Jeux et jouets de l'Ouest africain*. Il est décrit dans un chapitre consacré aux jeux de combinaisons à deux joueurs et sans hasard, à savoir les jeux de quadrillages (échecs, dames, morpions), les jeux à 12 cases (awélé) et autres variantes.

Le contexte social dans lequel se joue le *Tiouk-Tiouk* ne paraît pas si éloigné de celui de l'Europe au XVI^e siècle : « Il existe en Afrique

des formes de jeux à quadrillages très difficiles, qui furent longtemps permises seulement à certaines classes privilégiées et pour lesquelles les familles conservent, secrètes, des méthodes traditionnelles permettant d'écraser l'adversaire dès les premiers coups s'il ne possède pas lui-même les vieilles méthodes traditionnelles de défense, et des moyens de reprendre l'offensive. » Une fois encore, les clés de la résolution d'un jeu et des stratégies gagnantes sont détenues par une société minoritaire privilégiée qui profite de ses savoirs pour dominer « une population subjuguée ». Les jeux de quadrillage, sérieux par excellence, sont souvent réservés aux hommes adultes, voire aux chefs qui détiennent les stratégies gagnantes et affirment ainsi leur supériorité. C'est le cas du *Tiouk-Tiouk*, qui se présente comme un jeu de quadrillage bien que l'objectif ne soit pas de capturer les pions de son adversaire, mais de les bloquer (voir l'encadré page ci-contre).

La partie se joue sur un damier carré composé d'un nombre pair de rangées dessiné dans le sable, où sont placées de part et d'autre une rangée avec des bâtonnets et une autre avec des graines. Chaque joueur se voit attribuer une rangée, donc un type d'objets, et peut déplacer ses pions un à la fois, en avant ou en arrière à volonté, et d'autant de cases qu'il lui plaît, mais ne peut pas sauter par-dessus le pion d'un partenaire. A gagné qui arrive à bloquer tous les pions du partenaire.

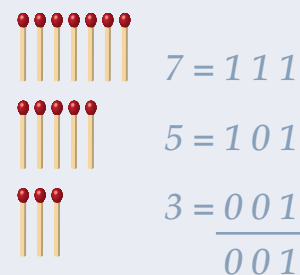
Le jeu de Nim selon Bouton

Le jeu décrit par Bouton oppose deux joueurs, autour d'une table sur laquelle sont placées trois piles d'objets de toutes sortes (nous prendrons ici des allumettes), le nombre d'objets dans chaque pile étant arbitraire et différent au commencement du jeu. À son tour, chaque joueur sélectionne une pile et retire autant de jetons qu'il veut : un, deux, ... ou la pile entière. Le gagnant est celui qui prend le(s) dernier(s) jeton(s).

Bouton donne ensuite une méthode pour déterminer la nature de la configuration juste après qu'on a joué : gagnante ou perdante. Grâce à deux théorèmes, il montre que si on laisse une position gagnante à l'adversaire, celui-ci ne peut qu'engendrer une position perdante, mais qu'à partir de cette position perdante, il est possible d'atteindre une position gagnante. Ainsi, une position gagnante laissée à l'adversaire peut conduire

à la victoire (à condition de réfléchir un peu !).

Pour savoir si une configuration est gagnante, il faut écrire les nombres de jetons de chaque pile en binaire (base 2), c'est-à-dire sous la forme d'une somme de puissances de 2 (les coefficients de cette somme constituent le nombre binaire recherché), et les additionner. Si la somme est nulle (sachant qu'en binaire $1 + 1 = 0$), alors la position est gagnante.



$$\begin{array}{r}
 7 = 111 \\
 5 = 101 \\
 3 = 001 \\
 \hline
 001
 \end{array}$$

La somme en binaire des nombres d'allumettes constituant chaque tas (ici 7, 5, 3) est non nulle. D'après Bouton, la position est perdante. Il vous est donc possible, par une diminution adéquate, d'atteindre une position gagnante...