



DPI 420

LOGIQUE & CALCUL

Si la définition de la suite diatomique de Stern est simple, sa structure est riche de propriétés. Elle est le nœud central d'un vaste réseau de relations dont on découvre chaque année des prolongements.

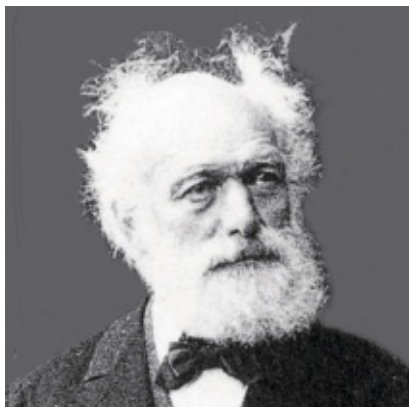
Jean-Paul DELAHAYE

Tout le monde connaît la suite de Leonardo Fibonacci, définie par : $f_0 = 0$; $f_1 = 1$; $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Chaque terme est la somme des deux précédents et le début de la suite est 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Elle apparaît dans des contextes variés et possède une multitude de propriétés remarquables, au point qu'une revue de mathématiques lui est entièrement dédiée : le *Fibonacci Quarterly*, journal officiel de la *Fibonacci Association* (<http://www.fq.math.ca/>).

Cette merveille arithmétique et combinatoire a une sœur, moins célèbre, mais aussi intéressante, la suite diatomique de Stern. Elle est connue aussi sous le nom de suite de Stern-Brocot ou fonction *fusc*. Comme la suite de Fibonacci, on la retrouve au centre d'un réseau infini de relations qui en font l'un des plus fascinants objets des mathématiques discrètes. Sa définition ressemble à celle de la suite de Fibonacci. La suite diatomique de Stern est le résultat des petites équations suivantes :

$$s_0 = 0; s_1 = 1; s_{2n} = s_n; s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}.$$

Autrement dit, elle commence par 0, 1, puis, pour la connaître en m , si m est pair, on regarde sa valeur en $m/2$, et si m est impair, on coupe m en deux parties aussi égales que possible, on regarde les valeurs correspondantes et on additionne.



Moritz Stern (1807-1894)

Le nom de la suite est celui du mathématicien Moritz Stern qui l'a mentionnée et étudiée dans un article de 1858. Stern était un élève de Gauss, à qui il succéda à la tête du Département de mathématiques de Göttingen. Quant à Achille Brocot (1817-1878), il était horloger et s'intéressait aux fractions pour ses mouvements d'horloge. Depuis une dizaine d'années, la suite a fait l'objet d'une attention soutenue, conduisant à de nombreuses et jolies découvertes. L'adjectif diatomique provient de la formule $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$, qui signifie que les termes nouveaux de la suite naissent de la somme de deux termes, ou atomes, précédents.

Les premiers éléments de la suite sont indiqués au bas de la page. Elle semble

complexe et impénétrable. Elle est bien sûr recensée dans l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane, sous le numéro A002487 (voir <http://oeis.org/>). Son graphe est un peu plus parlant (voir l'encadré 1), car on perçoit des régularités et même un aspect fractal : des formes semblables apparaissent à diverses échelles.

Dispositions en tableaux

Il existe plusieurs méthodes pour en disposer les termes qui aident à en dévoiler l'ordre secret. La première disposition graphique révélatrice, nommée *Tableau tassé de Stern*, consiste à oublier le 0 du début et à faire des retours à la ligne après 1, 2, 4, 8 termes, etc. .

On remarque que la somme des éléments de la ligne n vaut exactement 3^n , ce qu'un peu de travail mathématique permet de

1																					A
1	2																				
1	3	2	3																		
1	4	3	5	2	5	3	4														
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5						
1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7...			
1	7	6	11	5	14	9	13	4	15	11	18	7	17	10	13	3	14	11 ...			
1	8	7	13	6	17	11	16	5	19	14	23	9	21	13	17	4	19	15 ...			
1	9	8	15	7	20	13	19	6	23	17	28	11	25	16	21	5	24	19 ...			
1	10	9	17	8	23	15	22	7	27	20	33	13	29	19	25	6	29	23 ...			
1	11	10	19	9	26	17	25	8	31	23	38	15	34	22	29	7	34	27 ...			

1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1, 6, 5, 9, 4, 11, 7, 10, 3, 11, 8, 13, 5, 12, 7,

9, 2, 9, 7, 12, 5, 13, 8, 11, 3, 10, 7, 11, 4, 9, 5, 6, 1, 7, 6, 11, 5, 14, 9, 13, 4, 15, 11, 18, 7, 17, 10, 13, 3, 14, 11, 19, 8, 21

1. Les premiers éléments de la suite de Stern-Brocot

Dans cette représentation des premiers éléments de la suite diatomique de Stern-Brocot, on porte en abscisse le numéro de chaque élément dans la suite et en ordonnée sa valeur. On voit apparaître des structures à plusieurs échelles, comme c'est le cas pour les images frac-

tales. Ces structures témoignent que, malgré son apparence désordonnée, la suite diatomique de Stern contient un ordre caché et même une simplicité inattendue. L'intérêt qu'on lui porte depuis quelques années le confirme spectaculairement.

