démontrer. Toutes les propriétés que nous allons mentionner ont été démontrées (voir par exemple l'article de Sam Northshield indiqué dans la bibliographie). Ces démonstrations ne présentent pas de difficultés exceptionnelles : dans ce domaine, lorsqu'une propriété comme celle des puissances de 3 est identifiée, la prouver n'est qu'une affaire d'effort et de patience que la communauté mathématique est presque certaine de voir aboutir. Le jeu de la recherche dans l'étude d'une telle suite se situe bien plus dans la découverte des propriétés que dans leur démonstration.

Une seconde propriété tout à fait remarquable du *Tableau tassé de Stern* est que chaque colonne est une suite arithmétique, c'est-à-dire dont la différence entre deux termes consécutifs est constante. La quatrième colonne est par exemple la suite arithmétique 3, 5, 7, 9, 11, 13,... c'est-à-dire celle de tous les nombres impairs. La raison (différence entre deux termes consécutifs) de la suite arithmétique de la colonne 0 est 0 ; celle de la colonne 1 est 1 ; ensuite viennent les raisons 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, ... suite que vous reconnaissez (la suite de Stern). N'est-ce pas amusant et miraculeux ?

Le tableau précédent se dispose aussi en étalant les nombres de chaque ligne et en ajoutant un 1 (en rouge) au bout de chacune, ce qui conduit à l'arbre diatomique de Stern **B**.

Des liens avec le triangle de Pascal

Chaque ligne est un palindrome, ce qui est une propriété intéressante... qui a été démontrée. Quand la suite est ainsi disposée, bien d'autres relations apparaissent. Cet arbre diatomique de Stern se construit indépendamment des formules données plus haut, en utilisant un procédé proche de celui qui conduit au fameux triangle de Pascal. Rappelons que pour le triangle de Pascal **C**, chaque élément est la somme de ses deux voisins sur la ligne au-dessus (par exemple, 35 est le résultat de 15 + 20). On peut le disposer en triangle rectangle ou isocèle.

Dans l'arbre diatomique de Stern, chaque ligne nouvelle est obtenue en recopiant la ligne précédente et en insérant un nouvel entier entre chaque nombre qui est simplement la somme de ceux entre lesquels on l'insère. Cette proximité avec le triangle de Pascal se manifeste de multiples façons, et les trois structures du triangle de Pascal, de la suite de Fibonacci et de la suite diatomique de Stern entretiennent de solides relations « amicales». Voici quatre de ces étonnants liens entre joyaux des mathématiques discrètes.

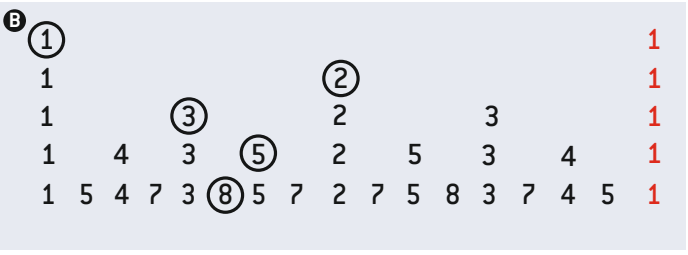
1) Les maximums des lignes du tableau tassé de Stern (ou, ce qui revient au même, de l'arbre diatomique de Stern) sont exactement les termes de la suite de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... On les a encerclés **B**.

2) En faisant la somme des coefficients du triangle de Pascal situés sur les obliques montantes (l'une d'elles est dessinée en rouge, **D**), on obtient les termes de la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

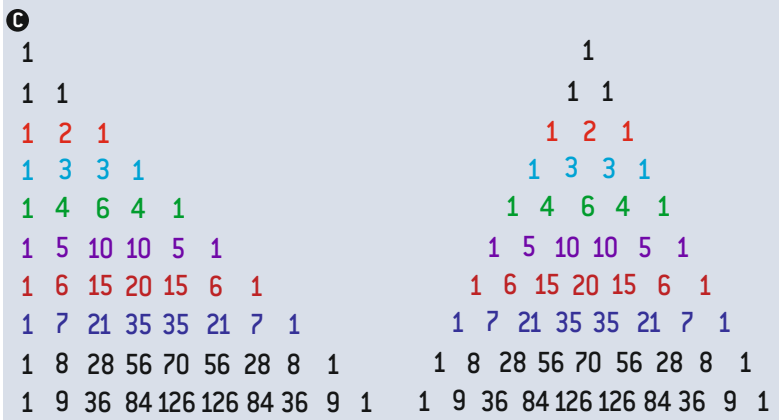
3) Si on compte le nombre de nombres impairs sur ces mêmes obliques montantes, on trouve exactement les termes de la suite diatomique de Stern, qui est donc cachée dans le triangle de Pascal comme l'est la suite de Fibonacci.

4) Cette dernière propriété conduit d'ailleurs à une formule explicite pour le n-ième terme s_n de la suite diatomique de Stern, qui en constitue une nouvelle défi-

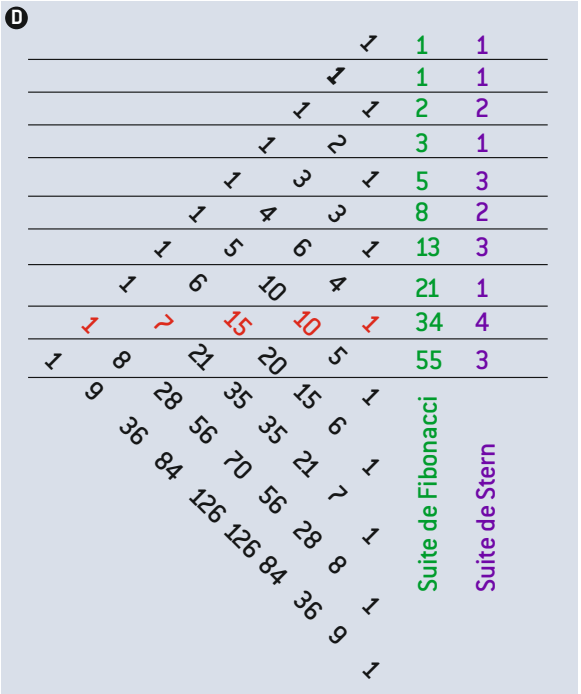
B



C



D



© Pour la Science - n° 420 - Octobre 2012