

2. Le graphe infini de la suite de Stern

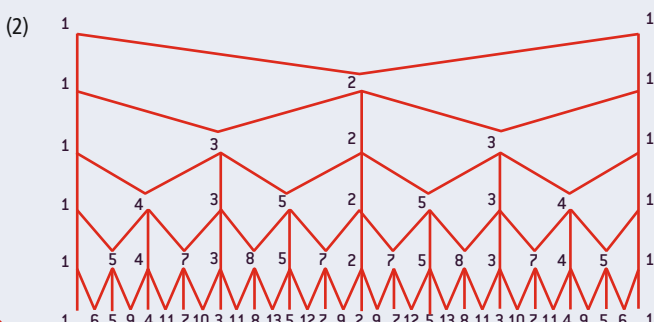
Il existe des interprétations graphiques assez simples de la suite diatomique de Stern. On considère le graphe (1) infini dessiné ci-dessous dont le principe de construction est immédiat. On peut le voir au choix :

- comme un point de départ qui donne lieu à trois branches faisant des angles de 45° , qui eux-mêmes se séparent chacune en trois branches du même type, etc.

La suite diatomique de Stern y est cachée. En comptant le nombre de chemins descendants permettant de joindre le sommet de la figure à un nœud du graphe, on découvre (et l'on démontre) que chaque ligne lue jusqu'à la moitié est le début de la

Le graphe (2), l'arbre diatomique de Stern, possède une propriété du même type, sauf que cette fois la suite de Stern s'obtient simplement en mettant bout à bout les nombres de chemins descendants écrits aux nœuds. On peut aussi, pour obtenir une nouvelle

Un autre graphe infini, que nous laissons au lecteur le soin de deviner et de dessiner, donne les coefficients du triangle de Pascal par ce procédé de décompte des chemins descendants.



inition à partir des coefficients de binôme de Newton (les éléments du triangle de Pascal) :

$$s_n = \sum_{2i+j=n-1} \left(\binom{i+j}{i} \bmod 2 \right)$$

De nombreux et remarquables liens existent aussi entre la suite diatomique de Stern et le système de numération binaire. Nous allons en détailler trois qui attestent à nouveau qu'en ces domaines des mathématiques discrètes, « Tout est dans tout » et qu'un étroit et serré système de relations fait passer rapidement d'une structure à une autre... pour qui sait ouvrir les yeux.

La numération binaire

La valeur de s_n est exactement le nombre de représentations de $n - 1$ en notation binaire généralisée, c'est-à-dire comme somme de puissances de 2 prises 0, 1 ou 2 fois [la notation binaire est la représentation de n en somme de puissances de 2, prises chacune 0 ou 1 fois]. Expliquons cela.

a) $8 = 8$, qui donne la notation binaire 1000_2 (le 2 en indice est là pour éviter la confusion entre notations binaires et décimales) ;

c) $8 = 4 + 2 + 2$, qui donne 120_2 ;
d) $8 = 4 + 2 + 1 + 1$, qui donne 112_2 .

Dans son merveilleux livre, publié en 2003 et entièrement consacré aux constantes mathématiques, Steven Finch note que la valeur de s_n est aussi le nombre de façons d'extraire de l'écriture binaire de n une suite alternée de 1 et de 0 commençant et se terminant par 1.

Un autre lien extraordinaire entre la base de numération 2 et la suite diatomique de

Stern est celui qui permet, à partir de n écrit en binaire, d'avoir immédiatement s_n . Partant de n , par exemple 98, on l'écrit en base 2 : 1100010_2 . On compte le nombre de 1 qui commencent la suite 1100010_2 , il y en a 2, $a_0 = 2$; on compte le nombre de 0 qui suivent, $a_1 = 3$; puis le nombre de 1 qui suivent, $a_2 = 1$; puis le nombre de 0 qui suivent, $a_3 = 1$, puis enfin le nombre de 1 qui suivent, $a_4 = 0$. On considère alors la fraction :

$$a_4 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} = -\frac{9}{16}$$

Cette fraction permet d'affirmer que la valeur de s_{98} est 9, le numérateur. En prime, le terme suivant est le dénominateur : $s_{99} = 16$. Pour un entier n quelconque, on écrit n sous forme binaire, et la fraction associée comme précédemment : son numérateur et son dénominateur sont les termes de rang n et $n + 1$ de la suite diatomique de Stern.

On vérifie qu'il en est bien ainsi, mais, comme on l'a déjà dit, le procédé n'est pas