PLS

Que reprochez-vous précisément à ce genre d'écrits ?

➜ **YVES GINGRAS :** Ces livres, qui se veulent être de la vulgarisation scientifique, sont destinés au grand public et jouissent de l'aura de leurs auteurs, dont le statut et la réputation scientifiques sont acquis. Les lecteurs leur accordent donc une forte crédibilité. Or ces auteurs outrepassent leur compétence scientifique en mettant en avant des conceptions religieuses ou mystiques qui sont étrangères à la science. Ils profitent de leur image de scientifiques pour diffuser leurs opinions personnelles. Leurs livres se veulent une présentation des découvertes de la science moderne, mais leurs titres et une partie de leur contenu suggèrent, en général de façon subtile et indirecte, des liens entre la science de pointe et la spiritualité, la solution des mystères de la vie et des origines de l'Univers. Ils jouent sur l'ambiguïté, sur la fibre du mystère, comme le fait *X-Files*, série télévisée où l'on navigue constamment entre la science et les croyances paranormales. C'est également flagrant avec les spéculations, invérifiables par définition, sur les « univers parallèles ».

PLS

De telles incursions hors de la science pourraient n'être qu'une simple stratégie commerciale de la part de l'auteur ou de son éditeur, pour mieux appâter les lecteurs…

➜ **YVES GINGRAS :** Quand seul le titre joue sur la corde mystique et pas le contenu, on peut croire que oui. Mais cela confirme la tendance à vouloir marier science et religion, ou du moins science et spiritualité, ce qui crée une confusion dangereuse. Et même dans cette situation, l'auteur a une responsabilité quant au choix du titre et ne peut se défausser sur son éditeur. Utiliser comme titre *The God Particle* comme l'a fait L. Lederman – ou comme l'ont fait de nombreux journaux et magazines à propos de la récente découverte au CERN du boson de Higgs – ne fait qu'entretenir la confusion entre ce qui relève de la science et ce qui relève de la spiritualité. Cela étant, l'usage stratégique des soi-disant liens entre science et religion ne se limite pas à faire mousser les ventes. Ainsi, L. Lederman avait plutôt un but politique en publiant en 1993 son ouvrage. Les physiciens américains cherchaient à l'époque des appuis publics pour convaincre leurs autorités de ne pas mettre fin à la construction du SSC, un collisionneur de particules gigantesque et coûteux qui devait permettre de découvrir le boson de Higgs, particule clef prédite par les théoriciens.

PLS

Les scientifiques qui jouent sur le registre mystique, mais qui n'ont pas de visée stratégique, sont-ils malgré tout suspects ?

➜ **YVES GINGRAS :** Chacun est libre de croire en ce qu'il veut, mais promouvoir ses convictions spirituelles en s'appuyant sur la science est, au mieux, une preuve de grande naïveté épistémologique de la part de personnalités censées être d'un haut niveau scientifique.

Il faut aussi remarquer que la vague de publication d'ouvrages de vulgarisation scientifique faisant l'amalgame entre science et religion ou mysticisme a été fortement encouragée par les activités de la fondation américaine *Templeton* créée en 1987. Ayant pour mission de promouvoir les liens entre science, théologie, spiritualité et religion, elle décerne notamment un prix annuel de plus de un million de dollars à une personnalité ayant fait « une contribution unique à une meilleure compréhension de Dieu et des réalités spirituelles ».

Or plusieurs scientifiques, qui ne sont nullement philosophes ou théologiens, ont obtenu ce prix. Le premier fut d'ailleurs P. Davies, physicien reconnu et auteur prolifique de livres où abondent les mots *Dieu*, *science*, *esprit*, *miracle*, etc. La stratégie de la fondation de donner l'impression que science et spiritualité sont compatibles est tellement évidente qu'il était possible (je l'ai fait !) de prédire que l'astrophysicien britannique Martin Rees l'obtiendrait, ce qui fut le cas en 2011. M. Rees fait partie de ceux qui ont surinterprété le soi-disant « principe anthropique » selon lequel les constantes de la nature sont précisément calibrées pour permettre l'apparition de l'homme. Or ce principe n'est qu'une tautologie, qui consiste à dire que si le monde avait été différent, nous ne serions pas là ! Au lieu d'expliquer qu'il n'y a là aucun mystère, on laisse planer l'idée qu'un créateur doit avoir fixé ces valeurs pour nous faire ensuite apparaître. Cela n'a rien de scientifique, mais c'est très attrayant pour les esprits qui cherchent à conforter leurs croyances religieuses ou spirituelles en se servant de la science.

PLS

Comment réagissent les autres scientifiques face à cette dérive ?

➜ **YVES GINGRAS :** Ils sont plutôt indulgents envers leurs confrères, comme si une forme de corporatisme leur soufflait que tout est bon pour promouvoir les sciences. J'ai été stupéfait de lire un compte rendu du livre *The Physics of Immortality* dans la revue hebdomadaire *Science,* qui était somme toute positif et ne disait mot de l'absurdité de prétendre démontrer l'immortalité de l'âme en invoquant des équations de la théorie quantique des champs – des équations présentes dans le livre simplement pour impressionner les lecteurs. Et je n'ai pas vu beaucoup de physiciens déconstruire le *Tao de la physique* ou critiquer les interprétations abusives du « principe anthropique ». Au lieu de se contenter de dénoncer les astrologues et autres charlatans évidents, ce qui est assez facile, les scientifiques rationalistes devraient rappeler à l'ordre ceux parmi leurs collègues qui mélangent les genres. N'oublions pas que les scientifiques, malgré certaines critiques, ont encore une forte crédibilité, dont doit découler une vraie responsabilité.

PLS

Quelle attitude devraient-ils adopter ?

➜ **YVES GINGRAS :** Il faut, selon moi, constamment rappeler la spécificité des sciences, dont les méthodes n'ont pas vocation à répondre à tout. L'honnêteté intellectuelle oblige à dire que l'on ne trouvera jamais Dieu dans un accélérateur de particules ! Et même quand l'objectif est juste de faire la promotion des sciences, il faut rester sur les rails. La fin ne justifie pas les moyens, même lorsqu'il s'agit de faire « aimer » les sciences. ■

Propos recueillis par Maurice Mashaal.

La conjecture

Gerhard Frey

Les décompositions en facteurs premiers de deux nombres entiers *A* et *B* sont reliées à celle de leur somme *C* par des lois profondes qui s'éclaircissent peu à peu.

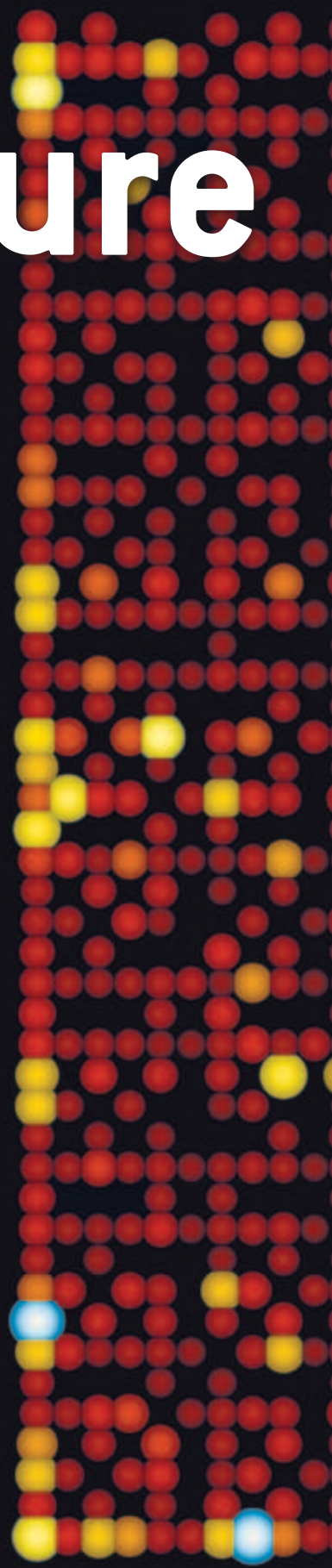
À première vue, la conjecture *ABC* semble être d'une trompeuse simplicité. Elle énonce une certaine propriété sur trois nombres entiers naturels *A*, *B* et *C* liés par la relation la plus simple possible : $A + B = C$. Ce qu'elle affirme exactement n'est pas évident. L'idée est que si les facteurs premiers de deux nombres *A* et *B* se répètent beaucoup, il y a peu de chance pour que ce soit aussi le cas pour leur somme.

La conjecture *ABC* a été énoncée en 1985 par Joseph Oesterlé, de l'Université Paris VI, et David Masser, de l'Université de Bâle, en Suisse. Malgré de solides indices en faveur de la validité de cette conjecture, aucune piste de démonstration ne semblait jusqu'ici très évidente, et la preuve paraissait encore éloignée. Cependant, cela pourrait avoir changé : un mathématicien reconnu de l'Université de Kyoto, Shinichi Mochizuki, affirme aujourd'hui avoir démontré la conjecture *ABC*. Ses pairs ont commencé à examiner sa démonstration, très longue et faisant appel à des outils nouveaux, mais il est trop tôt pour dire si son approche a été couronnée de succès.

La preuve de la conjecture *ABC* apporterait une solution à de nombreux problèmes importants de la théorie des nombres. En particulier, dans sa version forte, elle entraînerait la preuve du grand théorème de Fermat par une méthode différente de celle utilisée par Andrew Wiles et Richard Taylor en 1994.

La plupart des problèmes concernant les nombres entiers impliquent d'une façon ou d'une autre leurs facteurs premiers. Les nombres premiers sont les nombres qui ne sont divisibles que par eux-mêmes et par 1. La suite commence ainsi : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17… À première vue, la répartition des nombres premiers semble aléatoire. Y chercher une structure occupe les mathématiciens depuis des siècles. Le « théorème des nombres premiers » fournit cependant une estimation : le nombre de nombres premiers inférieurs à n croît comme $n / \ln(n)$ lorsque n devient grand.

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, chaque entier naturel se décompose de façon unique en un produit de nombres premiers (à l'ordre des facteurs près). Par exemple, $6\,936 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17^2$

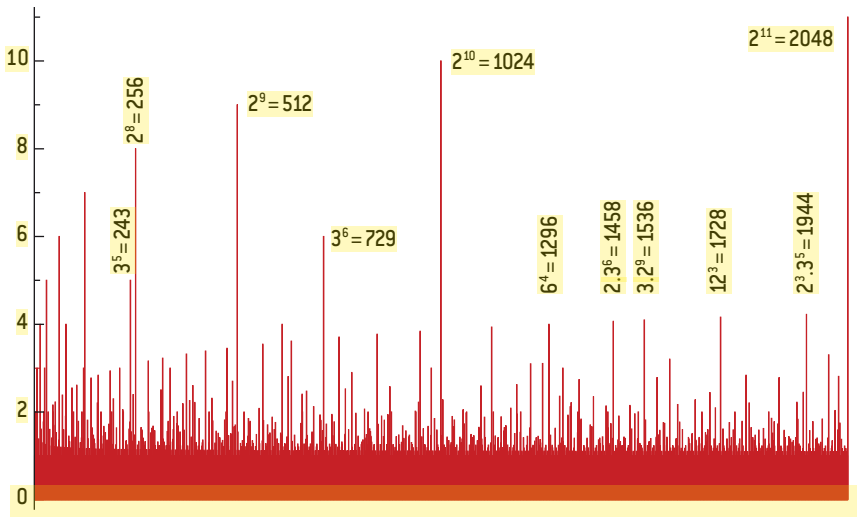


1. LA « RICHESSE » DES TRIPLETS *A*, *B*, *C* d'entiers où $C = A + B$ est représentée ici pour *A (en abscisse)* et *B (en ordonnée)* compris entre 2 et 50. La couleur et la taille des cercles indiquent la valeur de la richesse $\kappa(A, B, C)$ *(de 0,37, en rouge sombre, à 1,22, en blanc)*. Les lignes qui se dessinent suggèrent qu'en général, pour qu'un triplet d'entiers soit riche, il faut que l'un des membres le soit. On voit déjà dans cet échantillon modeste que la richesse se raréfie pour les grands nombres.

ABC

L'ESSENTIEL

- Tout nombre entier se décompose de façon unique en un produit de facteurs premiers.
- Les entiers formés de facteurs premiers portés à une puissance élevée sont qualifiés de « riches ». Ils sont assez rares.
- Il est encore plus rare que la somme de deux entiers riches soit encore riche. La conjecture *ABC* donne un sens précis à cet énoncé.
- Des théorèmes importants de la théorie des nombres, le théorème de Fermat notamment, découlent aisément de la conjecture *ABC*.
- La conjecture *ABC* semble vraie, mais sa démonstration se fait toujours attendre.



2. LA RICHESSE D'UN NOMBRE ENTIER n, notée $\delta(n)$, correspond à la puissance moyenne des facteurs premiers qui le composent. Ce graphique montre $\delta(n)$ pour les entiers compris entre 2 et 2 048. Les nombres les plus riches sont les « puissances pures » (comme 2^{11}), suivies de près par les nombres « puissants » (tous les facteurs premiers sont à la puissance 2 au moins). Le hasard semble régir cette distribution.

n'est divisible par aucun autre nombre premier que 2, 3 et 17.

La conjecture *ABC* porte sur les facteurs premiers des nombres entiers, et plus précisément sur leur diversité et leur fréquence. Un entier pris au hasard a en général peu de facteurs premiers, bien que certains soient présents plusieurs fois. Tout multiple de 9 contient par exemple deux fois au moins le facteur premier 3 (car $9 = 3^2$). Mais il est rare que la majorité des facteurs premiers apparaissent de nombreuses fois dans la décomposition. Les puissances pures, comme $67\,108\,864 = 2^{26}$, sont peu fréquentes, de même que les nombres « puissants », où chaque facteur premier apparaît avec un exposant au moins égal à 2 (comme dans $614\,810\,677 = 13^3 \cdot 23^4$). Si A et B sont deux nombres exceptionnels comportant des puissances élevées de leurs facteurs premiers, il faudrait que le diable s'en mêle pour que leur somme $A + B = C$ soit encore un entier exceptionnel. La conjecture *ABC* précise cet énoncé un peu flou.

Cette conjecture cache une particularité de la théorie des nombres. La structure additive des entiers naturels est particulièrement simple, et la structure multiplicative n'est guère plus compliquée. Mais les deux structures ne cohabitent pas bien : si on les combine, les choses se compliquent… et deviennent intéressantes. En d'autres termes, des propriétés de la somme $A + B$, du point de vue de la structure additive, dépendent de façon très régulière de celles de A et de B, mais du point de vue de la structure multiplicative, cette dépendance semble presque aléatoire. Le grand théorème de Fermat, selon lequel il n'existe pas d'entiers non nuls a, b et c vérifiant l'égalité $a^n + b^n = c^n$ pour $n > 2$, mélange ainsi addition et multiplication (sous forme de puissances), pour un résultat d'une redoutable complexité.

Richesse et pauvreté chez les nombres entiers

Mais revenons à la notion de nombre exceptionnel. On dit qu'un entier est « riche » si certains de ses facteurs premiers sont présents plusieurs fois dans la décomposition (c'est-à-dire avec une puissance supérieure ou égale à deux). On l'« appauvrit » en supprimant les facteurs premiers redondants pour ne conserver qu'un seul exemplaire de chaque. Cette version dépouillée d'un entier n est appelée son radical, noté $\mathrm{Rad}(n)$. Par exemple,

$\mathrm{Rad}(324) = \mathrm{Rad}(2^2 \cdot 3^4) = 2 \cdot 3 = 6$;
$\mathrm{Rad}(424) = \mathrm{Rad}(2^3 \cdot 53) = 2 \cdot 53 = 106$;
$\mathrm{Rad}(437) = \mathrm{Rad}(23 \cdot 19) = 23 \cdot 19 = 437$.

Le radical d'un nombre est toujours inférieur ou égal à ce nombre. Les nombres premiers et ceux qui contiennent une seule fois chacun de leurs facteurs premiers sont « au seuil de pauvreté » : ils sont égaux à leur radical. À l'inverse, si chaque facteur premier de n est muni d'un exposant élevé, alors $\mathrm{Rad}(n)$ est beaucoup plus petit que n.

Pour quantifier la richesse d'un nombre, on lui associe sa « puissance moyenne » $\delta(n)$, définie par l'égalité $n = [\mathrm{Rad}(n)]^{\delta(n)}$. En passant au logarithme, on obtient une définition explicite :

$$\delta(n) = \frac{\log(n)}{\log(\mathrm{Rad}(n))}$$

Pour les exemples précédents, on a : $\delta(324) = \log(324)/\log(6) = 3{,}22629\ldots$; $\delta(424) = \log(424)/\log(106) = 1{,}29726\ldots$, et évidemment $\delta(437) = \log(437)/\log(437) = 1$.

Un petit programme suffit à calculer rapidement la valeur moyenne δ^* de δ pour un ensemble de nombres. En tirant plusieurs fois au hasard 10 000 entiers entre un et un milliard, nous avons obtenu successivement les moyennes $\delta^* = 1{,}047519\ldots$, puis $\delta^* = 1{,}05267\ldots$, et $\delta^* = 1{,}04793\ldots$ Un tirage de 100 000 nombres au hasard sans limite de taille a donné $\delta^* = 1{,}049266\ldots$ Cela suggère qu'un nombre « moyen » ne vit que légèrement au-dessus du seuil de pauvreté. En règle générale, on s'attend à ce que la puissance moyenne ne dépasse pas 1,06.

Cette valeur moyenne suffit-elle à capturer la diversité des nombres entiers ? Évidemment, non. Il existe des cas isolés qui sont loin de toute valeur moyenne. Par exemple, dans l'intervalle allant de un à un milliard, on trouve le nombre richissime $67\,108\,864 = 2^{26}$, qui a une puissance moyenne $\delta = 26$. Et la richesse n'est pas bornée, puisqu'il existe des puissances de 2 avec un exposant aussi grand que l'on veut.

Cherchons le nombre le plus riche parmi 10 000 choisis au hasard dans l'intervalle précédent. Un premier essai donne $n = 692\,599\,663$, avec $\delta(n) = 3{,}831201\ldots$ Sa décomposition en facteurs premiers est $n = 7^7 \cdot 29^2$. Une deuxième tentative donne $n = 614\,810\,677 = 13^3 \cdot 23^4$, avec $\delta(n) = 3{,}55004\ldots$ Les nombres riches sont en général des nombres puissants. Par définition, la puissance moyenne des nombres puissants vaut au moins deux, donc la valeur maximale de δ pour un grand échantillon de nombres ne peut pas être inférieure à 2. En général, elle est nettement supérieure, comme le montrent les exemples.

Nos expériences numériques montrent en outre que les nombres puissants sont plus fréquents que les puissances pures (du type 2^{26}), ce que confirment des arguments – difficiles – de la théorie des nombres. Plus fréquents encore sont les nombres « presque puissants », c'est-à-dire puissants à un facteur près, petit par rapport à ce nombre (par exemple, 5 000 000 est presque puissant, car 5 est petit devant 1 000 000, très puissant). Eux aussi ont une