

puissance moyenne δ qui est bien au-dessus de la moyenne des entiers.

Résumons les conclusions de ces expériences numériques. Le nombre moyen est pauvre : $\delta(n) \leq 1,06$. Les nombres riches, avec $\delta \geq 2$, sont rares, bien plus encore que les nombres premiers, mais ils sont plus fréquents que les puissances pures et leur richesse est en principe illimitée.

On ne peut pas dire grand-chose d'intéressant de plus sur la richesse d'un seul nombre. Il est peu probable que deux nombres choisis au hasard soient tous les deux riches. Mais, en reprenant l'idée évoquée précédemment de combiner les structures multiplicative et additive, posons-nous la question suivante : la somme de deux nombres assez riches est-elle riche elle aussi ?

Mesurer la puissance moyenne d'un triplet

Choisissons deux entiers A et B avec la seule restriction qu'ils soient premiers entre eux (sans facteurs premiers en commun). En posant $C = A + B$, on s'attend en fait à ce qu'au moins un des nombres A , B ou C se comporte comme un nombre moyen.

Si A est un nombre moyen, on s'attend à ce que $A \leq \text{Rad}(A)^{1,06}$ ou, de façon équivalente, $\log(\text{Rad}(A)) \geq \log(A)/1,06$. Si c'est vrai pour A , B et C , alors $\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)) = \log(\text{Rad}(A)) + \log(\text{Rad}(B)) + \log(\text{Rad}(C)) \geq [\log(A) + \log(B) + \log(C)] / 1,06$ (comme A , B et donc C sont premiers entre eux, on a $\text{Rad}(A \cdot B \cdot C) = \text{Rad}(A) \cdot \text{Rad}(B) \cdot \text{Rad}(C)$).

Or pour des nombres entiers positifs, on a $A + B \leq A \cdot B + 1$, ce qui entraîne que $\log(C) \leq \log(A) + \log(B)$. En substituant cette inégalité dans la précédente, on obtient $\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)) \geq 2 \log(C) / 1,06$. Autrement dit, on s'attend à ce que, en moyenne, $C \leq \text{Rad}(A \cdot B \cdot C)^{0,53}$, ce qui peut être approximé par $\sqrt{\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)}$.

Par analogie avec la puissance moyenne, qui quantifie la richesse d'un nombre, on introduit une mesure de la « richesse » d'un triplet : pour des entiers naturels A , B , C premiers entre eux qui vérifient $A + B = C$, on pose :

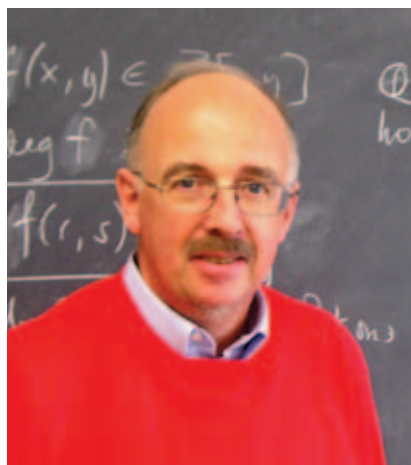
$$\kappa(A, B, C) = \frac{\log(C)}{\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C))}$$

$\kappa(A, B, C)$ est la puissance à laquelle il faut élever le radical de ABC pour retrouver C : $C = [\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)]^{\kappa(A, B, C)}$.

Nous avons évalué cette mesure par des expériences numériques. En choisissant au

hasard 10 000 triplets $(A, B, A + B = C)$ entre 1 et 10 milliards, nous avons obtenu une valeur moyenne $\kappa^*(A, B, C) = 0,3848...$ C'est largement en dessous de la valeur 0,53 conjecturée précédemment. En fait, l'approximation de $A + B$ par AB est très grossière.

La valeur moyenne de $\kappa(A, B, C)$ ne livre cependant pas beaucoup d'informations. Déterminer une borne supérieure serait plus intéressant. Mais existe-t-elle ?



3. LA CONJECTURE ABC A ÉTÉ ÉNONCÉE en 1985 par David Masser, de l'Université de Bâle, en Suisse (en haut), et Joseph Oesterlé, de l'Université de Paris VI (en bas).

Commençons par essayer de construire des triplets A , B , C pour lesquels $\kappa(A, B, C)$ est assez grand. Pour cela, il est utile de prendre un nombre C riche, par exemple l'entier $614\,810\,677 = 13^3 \cdot 23^4$ utilisé précédemment, et de l'écrire comme une somme de deux entiers A et B premiers entre eux. En choisissant 10 000 couples (A, B) au hasard qui vérifient ces conditions, nous avons obtenu $\kappa^*(A, B, C) = 0,70195$. C'est déjà bien plus que la valeur conjecturée 0,53, et ce pour un choix aléatoire.

En outre, il existe des triplets particuliers pour lesquels κ est encore plus grand. Par exemple, $\kappa(1\,365, 614\,797\,312, 614\,810\,677)$ est égal à 0,864135... Comment expliquer cela ? Les nombres $A = 13\,365 = 3^5 \cdot 5 \cdot 11$ et $B = 614\,797\,312 = 150\,097 \cdot 2^{12}$ sont assez riches, et $C = 13^3 \cdot 23^4$ l'est davantage. De plus, A est petit par rapport à C , ce qui en général signifie qu'il a peu de chances de contribuer au radical. Il est remarquable que notre exploration aléatoire ait trouvé cette solution.

À partir d'un tel triplet de nombres presque puissants, on peut construire une équation pour laquelle des facteurs du triplet sont une solution. Pour l'exemple précédent, on peut construire l'équation $55x^5 + 150\,097y^{12} = 23z^3$, qui a pour solution $x = 3$, $y = 2$ et $z = 299 = 13 \cdot 23$.

On peut généraliser cet exemple trouvé par hasard : on se donne une équation de trois variables, on cherche autant de solutions que possible et l'on construit à partir de celles-ci des triplets de nombres riches. Voici deux types d'équations intéressantes.

D'après un résultat élémentaire de la théorie des nombres, l'équation $x^2 = 3y^2 + 1$ admet un nombre infini de solutions. Le couple $(3\,650\,401, 2\,107\,560)$ en est une. Si on pose $A = 1$, $B = 3y^2$ et $C = x^2$, on obtient

$$\kappa(A, B, C) = \frac{\log(C)}{\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C))} = \frac{2 \log(x)}{\log(\text{Rad}(x \cdot 3y))}$$

Comme x et $3y$ sont premiers entre eux (sinon, un diviseur diviserait $x^2 - 3y^2 = 1$), on a $\text{Rad}(x \cdot 3y) = \text{Rad}(x) \text{Rad}(3y)$. En outre, $\log(3y)$ et $\log(x)$ sont presque égaux pour x et y assez grands ; par conséquent, si l'on suppose que ceux-ci sont des nombres « moyens » dont la puissance moyenne δ vaut 1,06, on déduit que $\kappa(A, B, C) \approx 1,06$, soit $\kappa(A, B, C) \geq 1$. Pour les nombres cités en exemple, on trouve $\kappa(1, 13\,325\,427\,460\,800, 13\,325\,427\,460\,801) = 1,06843$. C'est en effet supérieur à 1, mais pas de beaucoup.

Le deuxième type d'équations donne des puissances κ encore plus grandes : il s'agit de $ax^3 + by^3 = cz^3$, où les coefficients a , b et c sont des entiers relatifs. Si une solution (x, y, z) comporte des termes négatifs, on peut toujours modifier l'équation pour n'avoir que des termes positifs. Si tous les monômes de l'équation sont positifs, on pose $A = ax^3$, $B = by^3$ et $C = cz^3$.

On connaît assez bien l'ensemble des solutions de ce type d'équations : elles appartiennent aux courbes elliptiques, des objets très étudiés en théorie des nombres et en géométrie algébrique. Parfois, ce type