

puissance moyenne δ qui est bien au-dessus de la moyenne des entiers.

Résumons les conclusions de ces expériences numériques. Le nombre moyen est pauvre : $\delta(n) \leq 1,06$. Les nombres riches, avec $\delta \geq 2$, sont rares, bien plus encore que les nombres premiers, mais ils sont plus fréquents que les puissances pures et leur richesse est en principe illimitée.

On ne peut pas dire grand-chose d'intéressant de plus sur la richesse d'un seul nombre. Il est peu probable que deux nombres choisis au hasard soient tous les deux riches. Mais, en reprenant l'idée évoquée précédemment de combiner les structures multiplicative et additive, posons-nous la question suivante : la somme de deux nombres assez riches est-elle riche elle aussi ?

Mesurer la puissance moyenne d'un triplet

Choisissons deux entiers A et B avec la seule restriction qu'ils soient premiers entre eux (sans facteurs premiers en commun). En posant $C = A + B$, on s'attend en fait à ce qu'au moins un des nombres A , B ou C se comporte comme un nombre moyen.

Si A est un nombre moyen, on s'attend à ce que $A \leq \text{Rad}(A)^{1,06}$ ou, de façon équivalente, $\log(\text{Rad}(A)) \geq \log(A)/1,06$. Si c'est vrai pour A , B et C , alors $\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)) = \log(\text{Rad}(A)) + \log(\text{Rad}(B)) + \log(\text{Rad}(C)) \geq [\log(A) + \log(B) + \log(C)]/1,06$ (comme A , B et donc C sont premiers entre eux, on a $\text{Rad}(A \cdot B \cdot C) = \text{Rad}(A) \cdot \text{Rad}(B) \cdot \text{Rad}(C)$).

Or pour des nombres entiers positifs, on a $A + B \leq A \cdot B + 1$, ce qui entraîne que $\log(C) \leq \log(A) + \log(B)$. En substituant cette inégalité dans la précédente, on obtient $\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)) \geq 2 \log(C)/1,06$. Autrement dit, on s'attend à ce que, en moyenne, $C \leq \text{Rad}(A \cdot B \cdot C)^{0,53}$, ce qui peut être approximé par $\sqrt{\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)}$.

Par analogie avec la puissance moyenne, qui quantifie la richesse d'un nombre, on introduit une mesure de la « richesse » d'un triplet : pour des entiers naturels A , B , C premiers entre eux qui vérifient $A + B = C$, on pose :

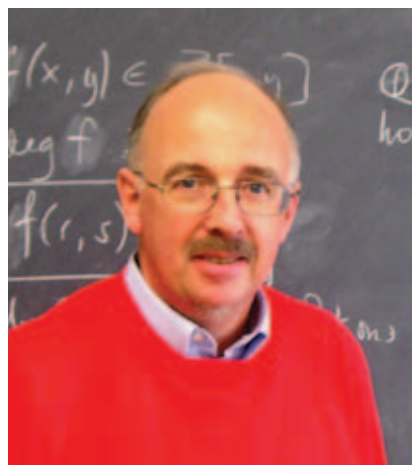
$$\kappa(A, B, C) = \frac{\log(C)}{\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C))}$$

$\kappa(A, B, C)$ est la puissance à laquelle il faut élever le radical de ABC pour retrouver C : $C = [\text{Rad}(A \cdot B \cdot C)]^{\kappa(A, B, C)}$.

Nous avons évalué cette mesure par des expériences numériques. En choisissant au

hasard 10 000 triplets $(A, B, A + B = C)$ entre 1 et 10 milliards, nous avons obtenu une valeur moyenne $\kappa^*(A, B, C) = 0,3848 \dots$. C'est largement en dessous de la valeur 0,53 conjecturée précédemment. En fait, l'approximation de $A + B$ par AB est très grossière.

La valeur moyenne de $\kappa(A, B, C)$ ne livre cependant pas beaucoup d'informations. Déterminer une borne supérieure serait plus intéressant. Mais existe-t-elle ?



3. LA CONJECTURE ABC A ÉTÉ ÉNONCÉE en 1985 par David Masser, de l'Université de Bâle, en Suisse (en haut), et Joseph Oesterlé, de l'Université de Paris VI (en bas).

Commençons par essayer de construire des triplets A , B , C pour lesquels $\kappa(A, B, C)$ est assez grand. Pour cela, il est utile de prendre un nombre C riche, par exemple l'entier $614\,810\,677 = 13^3 \cdot 23^4$ utilisé précédemment, et de l'écrire comme une somme de deux entiers A et B premiers entre eux. En choisissant 10 000 couples (A, B) au hasard qui vérifient ces conditions, nous avons obtenu $\kappa^*(A, B, C) = 0,70195$. C'est déjà bien plus que la valeur conjecturée 0,53, et ce pour un choix aléatoire.

En outre, il existe des triplets particuliers pour lesquels κ est encore plus grand. Par exemple, $\kappa(1\,365, 614\,797\,312, 614\,810\,677)$ est égal à 0,864135... Comment expliquer cela ? Les nombres $A = 13\,365 = 3^5 \cdot 5 \cdot 11$ et $B = 614\,797\,312 = 150\,097 \cdot 2^{12}$ sont assez riches, et $C = 13^3 \cdot 23^4$ l'est davantage. De plus, A est petit par rapport à C , ce qui en général signifie qu'il a peu de chances de contribuer au radical. Il est remarquable que notre exploration aléatoire ait trouvé cette solution.

À partir d'un tel triplet de nombres presque puissants, on peut construire une équation pour laquelle des facteurs du triplet sont une solution. Pour l'exemple précédent, on peut construire l'équation $55x^5 + 150\,097y^{12} = 23z^3$, qui a pour solution $x = 3$, $y = 2$ et $z = 299 = 13 \cdot 23$.

On peut généraliser cet exemple trouvé par hasard : on se donne une équation de trois variables, on cherche autant de solutions que possible et l'on construit à partir de celles-ci des triplets de nombres riches. Voici deux types d'équations intéressantes.

D'après un résultat élémentaire de la théorie des nombres, l'équation $x^2 = 3y^2 + 1$ admet un nombre infini de solutions. Le couple $(3\,650\,401, 2\,107\,560)$ en est une. Si on pose $A = 1$, $B = 3y^2$ et $C = x^2$, on obtient $\kappa(A, B, C) = \frac{\log(C)}{\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C))} = \frac{2 \log(x)}{\log(\text{Rad}(x \cdot 3y))}$.

Comme x et $3y$ sont premiers entre eux (sinon, un diviseur diviserait $x^2 - 3y^2 = 1$), on a $\text{Rad}(x \cdot 3y) = \text{Rad}(x) \text{Rad}(3y)$. En outre, $\log(3y)$ et $\log(x)$ sont presque égaux pour x et y assez grands ; par conséquent, si l'on suppose que ceux-ci sont des nombres « moyens » dont la puissance moyenne δ vaut 1,06, on déduit que $\kappa(A, B, C) \approx 1,06$, soit $\kappa(A, B, C) \geq 1$. Pour les nombres cités en exemple, on trouve $\kappa(1, 13\,325\,427\,460\,800, 13\,325\,427\,460\,801) = 1,06843$. C'est en effet supérieur à 1, mais pas de beaucoup.

Le deuxième type d'équations donne des puissances κ encore plus grandes : il s'agit de $ax^3 + by^3 = cz^3$, où les coefficients a , b et c sont des entiers relatifs. Si une solution (x, y, z) comporte des termes négatifs, on peut toujours modifier l'équation pour n'avoir que des termes positifs. Si tous les monômes de l'équation sont positifs, on pose $A = ax^3$, $B = by^3$ et $C = cz^3$.

On connaît assez bien l'ensemble des solutions de ce type d'équations : elles appartiennent aux courbes elliptiques, des objets très étudiés en théorie des nombres et en géométrie algébrique. Parfois, ce type

Croissance polynomiale ou exponentielle

La croissance d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers l'infini peut être similaire (entre autres) à celle d'un polynôme x^n ou à celle d'une exponentielle a^x (a fixé). Peu importe le comportement de $f(x)$ dans un intervalle fini, la croissance exponentielle devient tôt ou tard plus rapide que la croissance polynomiale.

Cette distinction est essentielle pour les calculs numériques. Un problème où le temps de calcul nécessaire croît de façon polynomiale en fonction de la variable étudiée (ou problème P) est considéré comme « facile » : il peut être résolu en un temps raisonnable. Si, en revanche, le nombre d'opérations

croît exponentiellement avec la variable considérée (problème NP, pour *non polynomial*), le problème est considéré comme difficile et dépasse vite les capacités de calcul existantes. Une des sept « questions du millénaire » est de savoir si les problèmes NP peuvent se ramener à des problèmes P.

d'équation n'a aucune solution parmi les entiers naturels non nuls (par exemple, $x^3 + y^3 = z^3$ n'a pas de solutions, d'après le théorème de Fermat), parfois elles en ont une infinité.

Si les nombres x, y, z sont à peu près du même ordre de grandeur et sont très supérieurs aux coefficients a, b et c , alors on obtient, par une estimation analogue à la précédente, que $\kappa(A, B, C) \approx \delta(x)$ et que cette valeur est probablement inférieure à 1,06. Si, en revanche, x est beaucoup plus petit (de plusieurs ordres de grandeur) que y et z , on obtient $\kappa(A, B, C) \approx 3/2 \delta(x)$.

Le triplet $(51^3, 5 \cdot 49^3, 22 \cdot 32^3)$ donne par exemple $\kappa(A, B, C) = 1,27509\dots$, le triplet $(1, 17 \cdot 7^3, 18^3)$ donne $\kappa = 1,31962\dots$, et le triplet $(1, 5 \cdot 2^4, 3 \cdot 3^3)$ donne $\kappa = 1,29\dots$

Le dernier exemple est particulièrement intéressant, car $81 = 3^4 = 5 \cdot 2^4 + 1$ est une solution de l'équation $x^4 = 5y^4 + z^k$, où k est un entier aussi grand que l'on veut. Plus les exposants dans l'équation sont élevés (2 et 3 dans les exemples précédents), plus la valeur de $\kappa(A, B, C)$ que l'on peut obtenir est grande – si tant est que l'équation en question admette encore des solutions. Or il n'y en a pas beaucoup. Gerd Faltings, lauréat de la médaille Fields en 1986 pour sa démonstration de la conjecture de Mordell, a montré par celle-ci que l'équation $x^4 = 5y^4 + z^k$ n'a, pour chaque exposant $k \geq 4$, qu'un nombre fini de solutions dont les termes sont premiers entre eux. On pense même que l'ensemble des solutions pour tous k confondus est fini, c'est-à-dire que l'ensemble des triplets (x, y, z) premiers entre eux et pour lesquels il existe un entier $k \geq 4$ tel que $x^4 = 5y^4 + z^k$ est fini.

Résumons. Nos expériences numériques suggèrent qu'en moyenne, la puissance moyenne $\kappa(A, B, C)$ d'un triplet est d'environ 0,5 ; dans tous les cas étudiés, κ est inférieur à 2 ; pour de nombreux exemples,

κ est supérieur à 1, et ces valeurs élevées sont intimement liées à des solutions d'équations polynomiales à trois variables.

La version forte de la conjecture ABC

Tous ces résultats expérimentaux permettent enfin de proposer – avec toute la prudence requise vis-à-vis de résultats empiriques – la conjecture suivante : la puissance moyenne $\kappa(A, B, C)$ des triplets (A, B, C) , où A, B et C sont premiers entre eux et tels que $A + B = C$, est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif α tel que $\kappa(A, B, C) \leq \alpha$.

On peut exprimer la même chose sans faire référence aux quantités C et κ , qui dépendent de A et de B . Un peu de travail donne :

$$A + B \leq [\text{Rad}(A \cdot B \cdot (A + B))]^\alpha$$

Plutôt que d'affirmer l'existence d'une telle borne α , on aurait préféré qu'elle soit calculable. Des algorithmes qui peuvent en principe déterminer cette valeur ont

TAILLER LE COSTUME IDÉAL
pour les entiers signifie couvrir tous les cas, mais avec une approximation aussi proche du corps que possible.

été mis au point ; mais en pratique, le temps de calcul prendrait des siècles, voire plus. On cherche toujours un algorithme effectif, c'est-à-dire qui pourrait livrer un résultat en un temps raisonnable, par exemple une semaine de calcul sur un ordinateur personnel.

Même si l'on parvenait à démontrer la conjecture pour une très grande valeur de α , cela ne servirait pas à grand-chose : une approximation trop grossière ne dit plus grand-chose sur le comportement des triplets. La borne α doit être aussi petite que possible. D'après nos résul-

tats empiriques, on serait tenté de choisir $\alpha = 1,4$. Malheureusement, dans certains cas, $\kappa(A, B, C)$ est supérieur à 1,4. Par ailleurs, dans la plupart des cas, $\kappa(A, B, C)$ est beaucoup plus petit. Cette borne est à la fois trop grande et trop petite.

Pour contourner ce problème, on introduit une deuxième constante. À la place de l'équation précédente, on pose :

$$A + B \leq d [\text{Rad}(A \cdot B \cdot (A + B))]^\alpha$$

où d est une constante qui devrait être effective. En exprimant cette inégalité en fonction de κ , on obtient l'inégalité suivante :

$$\kappa(A, B, C) \leq \alpha + \frac{\log d}{\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C))}$$

À première vue, la conjecture initiale est si déformée qu'elle semble vidée de sa substance. Si un contre-exemple ne vérifie pas l'inégalité, on n'a qu'à choisir une valeur de d plus grande pour que l'inégalité soit satisfaite. Supposons que l'on ait cherché un contre-exemple parmi tous les nombres inférieurs à un milliard ; il suffit de prendre d supérieur au plus grand des nombres C testés, soit un milliard, pour que la conjecture soit vérifiée pour tout α , ce qui n'a aucun intérêt.

Mais cette première impression est trompeuse. On a montré que plus A, B et C sont grands, plus $\log(\text{Rad}(A \cdot B \cdot C))$ devient grand, bien que plus lentement. Ainsi, le degré de liberté que nous offre la constante d devient négligeable lorsque les nombres considérés deviennent grands. Pour les nombres « très grands », seule la borne α compte.

Cependant, cette formulation contient encore trop de choix. Pour faire rentrer un contre-exemple dans le rang, on a le choix d'augmenter α ou d . Le but est pourtant de tailler, par un choix approprié de α et d , un « costume idéal » pour tous les entiers naturels : il devrait tout couvrir (aucun contre-exemple)

et en même temps être aussi proche du corps que possible (l'approximation ne doit pas être trop large). Cela signifie que pour au moins quelques triplets, l'inégalité ci-dessus devrait être une égalité. En prenant α et d légèrement plus petits que ces valeurs bien ajustées, on pourrait trouver un contre-exemple. Diminuer α demanderait d'agrandir d et inversement.

La conjecture ABC dans la version énoncée par J. Oesterlé et D. Masser est encore plus forte que notre dernière version. Elle dit qu'il suffit de prendre α supérieur à 1, mais aussi proche de 1