nombres. Il s'agit en général de problèmes diophantiens, du nom du mathématicien du IIIe siècle Diophante d'Alexandrie. Ces problèmes font intervenir des équations polynomiales à coefficients entiers, dont on cherche les solutions parmi les nombres entiers (on parle d'équations diophantiennes). Une démonstration de la conjecture *ABC* fournirait en particulier une solution simple aux problèmes suivants :

– La conjecture de Catalan, selon laquelle l'équation $x^m - y^n = 1$ n'a qu'une seule solution parmi les entiers naturels : $3^2 - 2^3 = 1$. Elle a été démontrée en 2002 par le mathématicien roumain Preda Mihăilescu.

– La conjecture de Mordell, démontrée en 1983 par Gerd Faltings, affirme que chaque courbe dont le « genre » est plus grand que 1, définie par une équation polynomiale à coefficients rationnels, ne peut contenir qu'un nombre fini de points dont les coordonnées sont rationnelles (le genre peut être vu comme le nombre de fois où il est possible de couper la courbe sans obtenir deux morceaux séparés). Noam Elkies, de l'Université Harvard, a démontré en 1991 que la conjecture de Mordell est une conséquence de la conjecture *ABC*. Si la conjecture *ABC* était valable dans sa version la plus forte, cela prouverait non seulement l'existence de ces points rationnels, mais donnerait aussi un procédé effectif pour les déterminer.

– Un grand nombre de généralisations de ces problèmes. La preuve de la conjecture *ABC* entraînerait par exemple celle que chaque égalité (dite de Fermat) $ax^n + by^n = cz^n$ pour $n \geq 4$ (et a, b, c entiers relatifs) n'a qu'un nombre fini de solutions. Il en est de même pour l'équation de Catalan-Fermat $x^n + y^m = z^k$, si les exposants sont « grands », c'est-à-dire si $1/n + 1/m + 1/k < 1$.

Il reste qu'à ce jour, la conjecture *ABC* n'est pas démontrée – du moins tant que les affirmations de S. Mochizuki n'ont pas été vérifiées. Pourquoi serait-elle vraie ? Et quels sont les résultats intermédiaires atteints à ce stade ?

Comme on l'a vu, de nombreuses données numériques soutiennent la validité de la conjecture, mais elles n'aident en rien à la prouver. En mathématiques, on cherche à obtenir des énoncés qui ne concernent pas seulement un comportement moyen, mais qui sont valables dans tous les cas. Or la difficulté de la conjecture *ABC* vient des nombres exceptionnels qui échappent à la statistique.

Des pistes ténues vers une démonstration

En utilisant des méthodes de ce qu'on appelle la théorie des nombres transcendants, Cameron Stewart, Robert Tijdeman et Kunrui Yu ont pu montrer que le taux de croissance de C en fonction de Rad(*ABC*) est au plus exponentiel. D'après la conjecture *ABC*, cette croissance est polynomiale, avec un exposant égal au plus à 2 ou $1 + \varepsilon$, suivant la version de la conjecture. On sait donc au moins que la croissance de C n'est pas illimitée, mais cela est insuffisant pour des grandes valeurs de C. Et il semble hors de portée de gravir, avec les méthodes utilisées, la marche séparant la croissance exponentielle de la croissance polynomiale.

Une autre approche emprunte un chemin *a priori* paradoxal. En généralisant la conjecture *ABC*, donc en la rendant en quelque sorte plus difficile, on a l'espoir de faciliter la démonstration. La généralisation consiste à remplacer les nombres naturels usuels par des structures abstraites plus compliquées. Les propriétés des entiers naturels utilisées dans la conjecture sont la structure additive, la structure multiplicative et l'ordre total : deux entiers peuvent toujours être comparés, au sens que l'un est forcément plus petit ou égal à l'autre. Ces trois propriétés se retrouvent dans beaucoup d'autres structures mathématiques, par exemple :

– Les nombres rationnels, c'est-à-dire les fractions de la forme r/s, où r et s sont des entiers relatifs. On utilise l'addition et la multiplication usuelles, mais au lieu de l'ordre habituel, on ordonne ici les rationnels par leur « hauteur », c'est-à-dire le maximum entre le numérateur et le dénominateur de la fraction sous forme réduite (sans tenir compte du signe). La hauteur est en quelque sorte une mesure de la complexité d'un nombre rationnel.

– Les polynômes, c'est-à-dire des sommes de produits de puissances des variables et de constantes. L'ordre est donné par le degré du polynôme, la plus élevée des sommes des exposants d'un terme du polynôme.

– Les fonctions rationnelles, c'est-à-dire les fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

– Les extensions algébriques des nombres rationnels (corps de nombres algébriques) et des fonctions rationnelles (corps de fonctions algébriques).

Il est possible de transposer la conjecture *ABC* pour ces structures ; le contexte devient ainsi plus clair. R. Mason et W. Stothers ont prouvé l'équivalent de la conjecture *ABC* pour les polynômes par des méthodes élémentaires en 1981, avant que la conjecture sur les entiers n'ait été énoncée. Et dans le cadre général des corps de fonctions, la relation avec les courbes elliptiques, qui avaient déjà joué un grand rôle dans la preuve du théorème de Fermat, devient évidente.

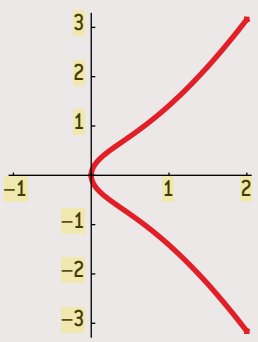
Considérons une courbe elliptique E. On peut définir trois nombres qui la caractérisent : son invariant modulaire, noté j_E, son discriminant, noté Δ_E, et sa hauteur, notée h_E *(voir l'encadré ci-contre)*. Le comportement de la courbe E est décrit par le radical du discriminant, aussi appelé conducteur de la courbe.

Lucien Szpiro, de l'Université de New York, a conjecturé qu'il existe un nombre k tel que pour toute courbe elliptique E, $\delta(|\Delta_E|) \leq k$ (la puissance moyenne du discriminant est bornée). Il est remarquable que L. Szpiro ait observé ce comportement dans le cas des corps de fonctions, et ait formulé un analogue pour le cas des corps de nombres.

Un lien intime avec les courbes elliptiques

Une courbe elliptique E *(ci-contre un exemple)* est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) solutions d'une équation de la forme $y^2 = x^3 + ax + b$, où a et b sont des entiers tels que le « discriminant » $\Delta_E = 4a^3 - 27b^2$ soit non nul (cela garantit que la courbe n'ait pas de points singuliers).

On peut définir une hauteur de Faltings h_E pour une courbe elliptique E. Lorsque la courbe est « semi-stable », h_E est reliée à la hauteur du nombre $j_E = 12^3 \cdot 4a^3/\Delta_E$, nommé invariant modulaire.



La « conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques », formulée par l'auteur, énonce que la hauteur h_E est bornée par une quantité qui dépend du radical du discriminant Δ_E ($h_E \leq k \log \mathrm{Rad}(|\Delta_E|)$). La conjecture *ABC* découle de celle sur les hauteurs.