

L. Szpiro a prouvé cette conjecture dans le cas des corps de fonctions (pour $k = 6$), si bien que la version forte de la conjecture *ABC* est vraie pour ces corps (ce qui généralise le résultat de R. Mason et W. Stothers). Cela justifie l'espoir que la conjecture soit valable pour les nombres rationnels qui, du point de vue arithmétique, sont assez semblables aux fonctions rationnelles.

J'ai généralisé la conjecture de L. Szpiro en affirmant que la hauteur h_E est bornée par un multiple de $\log \text{Rad}(\Delta_E)$. J'ai ensuite prouvé que cette « conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques » entraîne la conjecture *ABC*. Ces deux dernières sont même équivalentes dans le cadre des fonctions rationnelles.

En exploitant la très riche théorie des courbes elliptiques, développée depuis plus de 200 ans, notamment en utilisant des résultats qui ont conduit G. Faltings à la preuve de la conjecture de Mordell, j'ai ainsi trouvé une borne – malheureusement toujours exponentielle – de C en fonction de $\text{Rad}(ABC)$.

Mais on a fait encore mieux. Par sa relation avec l'arithmétique des courbes elliptiques, la conjecture *ABC* s'intègre à la géométrie algébrique. Cette branche des mathématiques, qui donne une interprétation géométrique à des problèmes de la théorie des nombres et apporte ainsi des éclaircissements surprenants, a été révolutionnée dans les années 1960 par le mathématicien Alexandre Grothendieck.

D'après moi, la conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques n'est pas seulement un énoncé profond sur ces objets en question, mais aussi l'arrière-plan structurel recherché pour la conjecture *ABC*. Et pour J. Oesterlé, la motivation essentielle de la conjecture *ABC* était son rapport avec l'arithmétique des courbes elliptiques.

La conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques étant vraie pour le corps des fonctions rationnelles, la conjecture *ABC* l'est aussi pour ce corps. Ma démonstration en est simple et courte, mais on ne peut malheureusement pas la transposer du monde géométrique vers celui des nombres. En revanche, la démonstration initiale de L. Szpiro, bien plus compliquée, fournit une ébauche d'une telle transposition.

Cette preuve tire parti de l'arithmétique des surfaces algébriques, bien étudiées en géométrie algébrique. Il existe un analogue à ces surfaces dans le monde des nombres,



Winfried Scharau

5. ALEXANDRE GROTHENDIECK (ici au Vietnam en 1967) a refondé dans les années 1960 la géométrie algébrique. Né en 1928, ce fils d'un anarchiste russe a découvert très jeune des résultats révolutionnaires, malgré une formation sommaire. En 1970, notamment par conviction antimilitariste, il quitte l'Institut des hautes études scientifiques, près de Paris. Depuis 1991, il vit retiré du monde dans les Pyrénées.

appelé « surfaces arithmétiques ». Ces objets jouent un rôle clef dans la démonstration de la conjecture de Mordell, et les propriétés des surfaces arithmétiques qui permettraient de prouver la conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques sont bien identifiées. Nous sommes cependant loin d'avoir trouvé ces propriétés...

Les travaux de S. Mochizuki ont-ils changé la donne ? Expert reconnu dans le domaine des surfaces arithmétiques, S. Mochizuki a prouvé des résultats difficiles sur la relation entre les « groupes fondamentaux au sens de Grothendieck » et les surfaces. Derrière ces termes et ces résultats se cachent encore des idées profondes de A. Grothendieck reliant la théorie de Galois à l'arithmétique. De nombreux spécialistes de la théorie des nombres se sont attelés à la vérification des travaux de S. Mochizuki, qui occupent des centaines de pages et qui utilisent des objets et méthodes mathématiques peu classiques. En attendant leur verdict, la conjecture *ABC* reste non démontrée.

On est au moins sûr d'une chose. La conjecture *ABC* n'est pas une bizarrerie gratuite de la théorie des nombres. Elle a de vastes conséquences et découle elle-même d'autres conjectures, dont il y a de bonnes raisons de penser qu'elles sont vraies. La relation entre théorie des nombres et géométrie qui sert de fondation depuis 50 ans à la géométrie algébrique serait mise à rude épreuve si la conjecture *ABC* était fausse. Il est difficile de l'imaginer. ■

■ BIBLIOGRAPHIE

S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller theory I : Construction of Hodge theatres*, 2012. Prépublication : www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ffmotizuki/Inter-universal/Teichmuller/Theory/I.pdf

G. Frey, *Der Beweis des Fermatschen Theorems*, *Moderne Mathematik*, pp. 166-175, Spektrum Akademischer Verlag, 1996.

G. Frey, *Links between solutions of $A - B = C$ and elliptic curves*, *Number Theory - Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1380, pp. 31-62, Springer, 1989.

J. Oesterlé, *Nouvelles approches du théorème de Fermat*, *Séminaire Bourbaki*, exposé 694, 1987-88.

F. Beukers, *Introduction to the ABC conjecture*, conférence donnée le 9 septembre 2005 : www.math.leidenuniv.nl/~ffdesmit/ic/abc/fritsABCpresentation.pdf

La liste des bons triplets : www.rekenmeemetabc.nl/?item=h_stats.

Projet de calcul collaboratif des bons triplets : www.abcthathome.com

Les LED blanches

L'éclairage

Les lampes à diodes électroluminescentes blanches sont appelées à remplacer les ampoules à incandescence. Elles offrent une bonne qualité de lumière et autorisent d'importantes économies d'énergie.

D'autres lampes à incandescence, ingénieusement combinées, sont exposées dans des salles voisines de celles de M. Edison mais aucune ne donne sa lumière douce et pure, sa clarté fixe, et n'est rattachée à aucun système d'installation véritablement pratique.

Disons-le, dans l'intérêt de la vérité, du progrès, du bien-être général, le système de M. Edison constitue une complète révolution dans l'éclairage domestique ; il est appelé à remplacer dans un temps très rapproché tous les systèmes en usage.

Le Journal des débats, 1881

Lors de l'Exposition internationale d'électricité, à Paris, en 1881, Thomas Edison fit la démonstration de ses lampes à incandescence. L'extrait du *Journal des débats* ci-dessus décrit les qualités de ce système novateur qui se généralisa à l'éclairage public et domestique. Edison se lança dans le développement des ampoules électriques dès 1879. Il perfectionna le modèle de l'Anglais Joseph Swan. Les premières lampes étaient constituées d'un filament de carbone, obtenu à partir d'une fibre de bambou du Japon, et placé dans une ampoule sous vide. Après avoir

testé environ 6 000 substances végétales, le choix d'Edison se porta sur le bambou pour sa flexibilité. La durée de vie des premières lampes était de 45 heures. Puis Lewis Latimer, ingénieur de la *Edison Company*, perfectionna la fabrication des lampes pour prolonger leur temps d'utilisation.

En 1898, Carl Auer von Welsbach remplaça le filament de carbone par un filament métallique pour obtenir les lampes à incandescence modernes, dont la durée de vie atteint aujourd'hui entre 1 000 et 2 000 heures. Bien qu'omniprésentes au XX^e siècle, ces lampes ne sont plus autorisées à la vente au sein de l'Union européenne depuis septembre 2012, car leur rendement énergétique est catastrophique : seulement cinq pour cent de l'énergie électrique sont convertis en lumière visible. Ces lampes ont néanmoins l'avantage de produire une lumière blanche chaude très proche de la lumière du jour.

Quel type d'éclairage peut remplacer la lampe à incandescence et satisfaire les contraintes d'une lumière agréable, une longue durée de vie et une faible consommation ? La question est un enjeu économique important, car l'éclairage représente plus

de 10 pour cent de la consommation d'électricité en France. Dans les grandes villes, ce chiffre peut même dépasser 30 pour cent.

De nombreux systèmes d'éclairage alternatifs ont été développés au cours du XX^e siècle. Il en est ainsi des lampes à décharge, qui produisent de la lumière par excitation d'un gaz sous l'effet d'un arc électrique. Différents gaz sont utilisés, tels le néon ou le sodium. Ces derniers sont souvent utilisés dans l'éclairage public, mais donnent des lumières de mauvaise qualité, très loin du spectre solaire, dans des tons orangés pour les lampes à sodium mélangé à du néon.

Les lampes fluorescentes appartiennent à la famille des lampes à décharge, mais la paroi interne est recouverte d'un revêtement fluorescent. Le fonctionnement de ces dispositifs repose aujourd'hui sur l'excitation de vapeur de mercure contenue dans une atmosphère d'argon. Après excitation, les atomes de mercure reviennent à leur état fondamental en émettant un rayonnement ultraviolet, qui est absorbé par des matériaux fluorescents recouvrant les parois du tube, matériaux qui réémettent de la lumière à différentes longueurs d'onde pour

de demain

Nicolas Grandjean

produire de la lumière blanche. Ces lampes sont de plus en plus présentes dans nos foyers, en particulier sous la forme d'ampoules fluocompactes, grâce à l'amélioration constante de la qualité de la lumière, la réduction du délai d'allumage et la diminution du prix d'achat.

Cependant, un autre type d'éclairage est apparu récemment sur le marché : les lampes à diodes électroluminescentes (LED, pour *Light-Emitting Diode*) blanches. Ces systèmes offrent des perspectives intéressantes pour un éclairage de qualité et à faible consommation ; ils pourraient remplacer les ampoules incandescentes d'ici une dizaine d'années.

En attendant, ces dispositifs peuvent encore être améliorés pour arriver à maturité. Cela passe notamment par une augmentation du rendement lumineux, défini comme le rapport du flux lumineux émis dans le domaine visible à la consommation électrique. Les LED blanches ont un rendement lumineux déjà élevé, mais il reste inférieur aux maxima théoriques qui, en fonction de la qualité de la lumière blanche, sont d'environ 350 à 400 lumens par watt. Le rendement actuel

L'ESSENTIEL

■ **L'éclairage représente plus de dix pour cent de la consommation d'électricité en France. Le remplacement des lampes à incandescence par des lampes plus efficaces, à base de diodes électroluminescentes (LED), entraînera des économies d'énergie.**

■ **Les LED au nitrure de gallium émettent une lumière bleue, dont une fraction est convertie en jaune pour donner de la lumière blanche.**

■ **Plusieurs pistes existent pour fabriquer du nitrure de gallium moins cher et de bonne qualité.**

RealCG/shutterstock.com

est de l'ordre de 100 lumens par watt pour les LED blanches, 50 à 80 lumens par watt pour les lampes fluocompactes et environ 15 lumens par watt pour les ampoules à incandescence, qui émettent surtout dans l'infrarouge.

Le principe de fonctionnement des LED blanches est très différent de celui des lampes à incandescence et fluorescentes. Nous allons voir qu'il est fondé sur la physique des semi-conducteurs et qu'il a nécessité une cinquantaine d'années de recherches et de développements avant d'aboutir à des lampes commerciales – dont le coût devrait baisser avec l'amélioration des techniques de fabrication.

Fluorescence contre rendement

Expliquons d'abord pourquoi les lampes fluocompactes ont un rendement lumineux non optimal. La raison principale est liée au phénomène de fluorescence et à l'énergie des photons impliqués – énergie directement liée à la longueur d'onde (ou la couleur) du photon. La désexcitation des atomes de mercure produit des photons