

LOGIQUE & CALCUL

Être normal ? Pas si facile !

En 1908, Émile Borel se demande s'il est possible que toutes les séquences de chiffres soient représentées de façon égale dans le développement décimal d'un nombre réel. Il prouve que c'est le cas le plus fréquent... mais ne propose pas d'exemples.

Jean-Paul DELAHAYE

En 1908, le mathématicien français Émile Borel (1871-1956) s'interroge sur les propriétés particulières que pourraient posséder les décimales des nombres usuels, comme $\sqrt{2}$, e ou π . Il introduit la notion de « nombre normal » dont nous verrons plus loin la définition. Aujourd'hui, tout un domaine de l'arithmétique s'occupe de ces questions qui ont pris de l'importance et qui progressent régulièrement, malgré l'extrême difficulté du sujet.

Une multitude d'articles et un livre récent de Yann Bugeaud exposent ces progrès. Un texte non publié d'Alan Turing (1912-1954) dont nous fêtons cette année le centième anniversaire de la naissance résolvait la question de l'existence de nombres « absolument normaux calculables ». Sa redécouverte montre une fois encore qu'informatique et mathématiques sont intimement liées, et illustre le génie de Turing.

Le nombre $13/50$ s'écrit $0,26$. C'est un nombre dont le développement décimal est fini. Un autre exemple est $721/250 = 2,884$. Tout quotient de deux entiers n/m avec m de la forme $2^i \times 5^j$ est de la même façon un nombre à l'écriture décimale finie. Inversement, tout nombre qui possède un développement décimal fini est de ce type. Il faut le savoir, mais, bien sûr, ce ne sont pas ces nombres décimaux qui nous inquiéteront !

Les nombres $8/15 = 0,53333333...$ (la suite de 3 est illimitée) et $149/7 =$

$21,285714285714...$ (la séquence 285714 se répète indéfiniment) sont dits ultimement périodiques : à partir d'un certain endroit, leur développement décimal se répète périodiquement, et cela jusqu'à l'infini. On montre que tout nombre rationnel, c'est-à-dire quotient de deux entiers, possède un développement décimal fini ou ultimement périodique, et qu'à l'inverse, aucun nombre irrationnel (ne pouvant s'écrire comme quotient de deux entiers ; c'est le cas de $\sqrt{2}$, e ou π) ne possède un développement décimal fini ou ultimement périodique.

Les décimales des nombres $\sqrt{2}$, e ou π semblent par ailleurs indiscernables de ce que donneraient des tirages au hasard de chiffres entre 0 et 9. Borel, pour exprimer cette idée, a introduit le concept de nombre simplement normal en base 10. Par définition, c'est un nombre tel que la proportion des 0 parmi les n premières décimales tend vers $1/10$ quand n tend vers l'infini, de même pour les 1, les 2, ..., les 9. Un nombre normal en base 10 est un nombre dont toute séquence fixée de k chiffres apparaît avec la fréquence limite $1/10^k$: ainsi, 1789 y apparaît avec une fréquence limite $1/10\,000$; 12345 y apparaît avec une fréquence limite $1/100\,000$. Ces définitions s'étendent aux bases de numération autres que 10.

Dans les décimales d'un nombre normal en base 10, on rencontre bien sûr toutes les séquences finies de chiffres, donc en particulier la séquence donnant votre numéro de sécurité sociale, ou celle, plus longue,

codant en 10 niveaux de gris votre portrait sous la forme d'une image carrée d'un million (= $1\,000 \times 1\,000$) de pixels, ou encore l'histoire de votre vie sans utiliser la lettre e .

Est-il possible d'être absolument normal ?

Un nombre normal en toute base de numération b supérieure ou égale à 2 est dit absolument normal. Cette propriété est une propriété forte de bon mélange des chiffres. Pour un nombre réel x donné, elle signifie que, quelle que soit la base de numération b que vous choisirez pour l'écrire, en recherchant une séquence de k chiffres très loin dans ce développement, vous aurez autant de chances de la trouver que n'importe laquelle des séquences de même longueur : 341 sera aussi fréquente que 777 ou 987 dans le développement en base 10 d'un nombre absolument normal. En base 2, la séquence 01010101 sera aussi fréquente que 00001111.

Ce n'est pas tout de définir une notion, encore faut-il être certain que la définition désigne quelque chose : existe-il des nombres : [1] simplement normaux en base b , [2] normaux en base b , [3] absolument normaux ? La réponse est facile pour « simplement normal en base 10 », car le nombre $123456789/9999999999 = 0,0123457890123456789...$ convient, et il y a des nombres du même type dans toute base.