

LOGIQUE & CALCUL

Être normal ? Pas si facile !

En 1908, Émile Borel se demande s'il est possible que toutes les séquences de chiffres soient représentées de façon égale dans le développement décimal d'un nombre réel. Il prouve que c'est le cas le plus fréquent... mais ne propose pas d'exemples.

Jean-Paul DELAHAYE

En 1908, le mathématicien français Émile Borel (1871-1956) s'interroge sur les propriétés particulières que pourraient posséder les décimales des nombres usuels, comme $\sqrt{2}$, e ou π . Il introduit la notion de « nombre normal » dont nous verrons plus loin la définition. Aujourd'hui, tout un domaine de l'arithmétique s'occupe de ces questions qui ont pris de l'importance et qui progressent régulièrement, malgré l'extrême difficulté du sujet.

Une multitude d'articles et un livre récent de Yann Bugeaud exposent ces progrès. Un texte non publié d'Alan Turing (1912-1954) dont nous fêtons cette année le centième anniversaire de la naissance résolvait la question de l'existence de nombres « absolument normaux calculables ». Sa redécouverte montre une fois encore qu'informatique et mathématiques sont intimement liées, et illustre le génie de Turing.

Le nombre $13/50$ s'écrit $0,26$. C'est un nombre dont le développement décimal est fini. Un autre exemple est $721/250 = 2,884$. Tout quotient de deux entiers n/m avec m de la forme $2^i \times 5^j$ est de la même façon un nombre à l'écriture décimale finie. Inversement, tout nombre qui possède un développement décimal fini est de ce type. Il faut le savoir, mais, bien sûr, ce ne sont pas ces nombres décimaux qui nous inquiéteront !

Les nombres $8/15 = 0,53333333...$ (la suite de 3 est illimitée) et $149/7 =$

$21,285714285714...$ (la séquence 285714 se répète indéfiniment) sont dits ultimement périodiques : à partir d'un certain endroit, leur développement décimal se répète périodiquement, et cela jusqu'à l'infini. On montre que tout nombre rationnel, c'est-à-dire quotient de deux entiers, possède un développement décimal fini ou ultimement périodique, et qu'à l'inverse, aucun nombre irrationnel (ne pouvant s'écrire comme quotient de deux entiers ; c'est le cas de $\sqrt{2}$, e ou π) ne possède un développement décimal fini ou ultimement périodique.

Les décimales des nombres $\sqrt{2}$, e ou π semblent par ailleurs indiscernables de ce que donneraient des tirages au hasard de chiffres entre 0 et 9. Borel, pour exprimer cette idée, a introduit le concept de nombre simplement normal en base 10. Par définition, c'est un nombre tel que la proportion des 0 parmi les n premières décimales tend vers $1/10$ quand n tend vers l'infini, de même pour les 1, les 2, ..., les 9. Un nombre normal en base 10 est un nombre dont toute séquence fixée de k chiffres apparaît avec la fréquence limite $1/10^k$: ainsi, 1789 y apparaît avec une fréquence limite $1/10000$; 12345 y apparaît avec une fréquence limite $1/100000$. Ces définitions s'étendent aux bases de numération autres que 10.

Dans les décimales d'un nombre normal en base 10, on rencontre bien sûr toutes les séquences finies de chiffres, donc en particulier la séquence donnant votre numéro de sécurité sociale, ou celle, plus longue,

codant en 10 niveaux de gris votre portrait sous la forme d'une image carrée d'un million ($= 1000 \times 1000$) de pixels, ou encore l'histoire de votre vie sans utiliser la lettre e .

Est-il possible d'être absolument normal ?

Un nombre normal en toute base de numération b supérieure ou égale à 2 est dit absolument normal. Cette propriété est une propriété forte de bon mélange des chiffres. Pour un nombre réel x donné, elle signifie que, quelle que soit la base de numération b que vous choisirez pour l'écrire, en recherchant une séquence de k chiffres très loin dans ce développement, vous aurez autant de chances de la trouver que n'importe laquelle des séquences de même longueur : 341 sera aussi fréquente que 777 ou 987 dans le développement en base 10 d'un nombre absolument normal. En base 2, la séquence 01010101 sera aussi fréquente que 00001111.

Ce n'est pas tout de définir une notion, encore faut-il être certain que la définition désigne quelque chose : existe-il des nombres : [1] simplement normaux en base b , [2] normaux en base b , [3] absolument normaux ? La réponse est facile pour « simplement normal en base 10 », car le nombre $123456789/9999999999 = 0,0123457890123456789...$ convient, et il y a des nombres du même type dans toute base.

Pour les deux autres notions, c'est moins simple, mais Borel a démontré que l'ensemble des nombres qui ne sont pas absolument normaux s'enferme dans une famille $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ d'intervalles dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut. Dit autrement, il a démontré que l'ensemble des nombres qui ne sont pas absolument normaux constitue un sous-ensemble de mesure nulle [ou ensemble « négligeable » de l'ensemble des nombres réels].

L'une des conséquences de ce formidable et surprenant théorème est qu'il existe des nombres normaux en base b quel que soit b supérieur ou égal à 2 et qu'ils sont en quantité infinie non dénombrable (il y en a plus que des nombres entiers). Il en va de même pour les nombres absolument normaux. Non seulement il y en a, mais ils sont majoritaires : en pointant au hasard un nombre réel entre 0 et 1, on tombe, sauf cas infiniment rare, sur un nombre absolument normal.

C'est ici que les ennuis commencent !

Omniprésents, mais introuvables

La démonstration de Borel qu'il existe des nombres absolument normaux n'indique pas comment en obtenir explicitement. En théorie, ces nombres sont partout présents (ceux qui ne le sont pas forment un ensemble négligeable), mais la recherche d'un seul nombre dont on puisse prouver qu'il est normal en base b , ou mieux absolument normal, est un défi difficile.

Le nombre de Champernowne est obtenu en mettant bout à bout l'écriture décimale de tous les entiers : 0,1234567891011121314151617181920... C'est un nombre simple – nous l'avons défini en deux lignes – et pourtant il est normal en base 10. Bien sûr, il existe des nombres équivalents dans toutes les bases de numération. David Champernowne, qui fut professeur de statistique et d'économie à l'Université d'Oxford, était un ami d'Alan Turing. En 1933, il démontra que son nombre était normal en base 10 et l'on peut penser que cette trouvaille incita Turing à s'intéresser lui aussi aux nombres « mélangés » introduits par Borel.

Si l'on met bout à bout l'écriture décimale des nombres premiers, ce qui donne 0,23571113171923..., on obtient à nouveau un nombre normal en base 10. Ce résultat, obtenu en 1946, est dû conjointement à Arthur Copeland et à Paul Erdős, le mathématicien prolifique qui a publié 1 525 articles mathématiques durant sa longue carrière.

D'autres familles de nombres normaux (dans une base fixée) ont été proposées depuis, dont le nombre de Stoneham $\alpha_{2,3}$ introduit en 1973 qui est normal en base 2 :

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

Nous y reviendrons. Les constructions du nombre de Champernowne et de ses variantes, et les quelques autres nombres normaux dans une base fixée connue ne résolvent cependant que le problème

des nombres normaux en base b , pour un b unique dans chaque cas. Rien ne dit que le nombre de Champernowne, normal en base 10, soit normal en base 11, 9 ou 2. Les calculs par ordinateur nous conduisent à penser que c'est le cas, mais nul n'a su le démontrer jusqu'ici. Comment trouver un nombre absolument normal ?

Algorithmiquement complexe, donc normal

La théorie algorithmique de l'information semble proposer une solution élégante à cette énigme.

La taille du plus petit programme qui engendre les n premiers chiffres d'un nombre réel est la complexité de Kolmogorov de ces n chiffres. Si elle vaut toujours à peu près n quand n tend vers l'infini, on dit que l'on a affaire à un nombre aléatoire au sens de Martin-Löf (voir l'article du mois de mars 2012 de cette rubrique). Or un nombre aléatoire dans ce sens est absolument normal, comme l'ont démontré Cristian Calude et Helmut Jürgensen en 2002.

Un tel résultat ne donnerait rien de plus que l'affirmation de Borel que les nombres absolument normaux sont partout, si on ne pouvait pas trouver de nombres réels aléatoires bien identifiés. C'est là que le nombre Ω (oméga) de Gregory Chaitin intervient. Ce nombre est la probabilité qu'une machine universelle de Turing s'arrête quand on lui donne un programme écrit en binaire dont les bits sont tirés au

1. L'existence de nombres absolument normaux, sans exemples

Émile Borel introduit en 1908 la notion de nombre absolument normal (la fréquence d'apparition d'une séquence de k chiffres dans le développement en base b est $1/b^k$). Il prouve l'existence de tels nombres, et même qu'ils sont majoritaires. Il est cependant lucide sur le malaise créé par ces nombres partout présents, mais introuvables en pratique. Il écrit :

« La probabilité pour qu'un nombre soit absolument normal est [...] égale à l'unité. Dans l'état actuel de la



science, la détermination effective d'un nombre absolument normal paraît un problème des plus difficiles : il serait intéressant, soit de le résoudre en construisant un nombre absolument normal, ou en montrant qu'un nombre irrationnel connu est absolument normal, soit de démontrer que, parmi les nombres pouvant être réellement définis, aucun n'est absolument normal ; si paradoxal que paraisse cet énoncé, il n'est nullement incompatible avec le fait que la pro-

babilité pour qu'un nombre soit absolument normal est égale à l'unité. »

Aujourd'hui, malgré des avancées significatives, bien des mystères subsistent sur ces nombres quasi paradoxaux. Sa femme, Camille Marbo, relate dans son livre de souvenirs que, découragé de ne pas avoir trouvé un seul exemple de nombre normal dans toutes les bases de numération, Borel abandonna les « hautes mathématiques » pour s'intéresser aux probabilités et à la théorie des jeux.