

Pour les deux autres notions, c'est moins simple, mais Borel a démontré que l'ensemble des nombres qui ne sont pas absolument normaux s'enferme dans une famille $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ d'intervalles dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut. Dit autrement, il a démontré que l'ensemble des nombres qui ne sont pas absolument normaux constitue un sous-ensemble de mesure nulle [ou ensemble « négligeable » de l'ensemble des nombres réels].

L'une des conséquences de ce formidable et surprenant théorème est qu'il existe des nombres normaux en base b quel que soit b supérieur ou égal à 2 et qu'ils sont en quantité infinie non dénombrable (il y en a plus que des nombres entiers). Il en va de même pour les nombres absolument normaux. Non seulement il y en a, mais ils sont majoritaires : en pointant au hasard un nombre réel entre 0 et 1, on tombe, sauf cas infiniment rare, sur un nombre absolument normal.

C'est ici que les ennuis commencent !

Omniprésents, mais introuvables

La démonstration de Borel qu'il existe des nombres absolument normaux n'indique pas comment en obtenir explicitement. En théorie, ces nombres sont partout présents (ceux qui ne le sont pas forment un ensemble négligeable), mais la recherche d'un seul nombre dont on puisse prouver qu'il est normal en base b , ou mieux absolument normal, est un défi difficile.

Le nombre de Champernowne est obtenu en mettant bout à bout l'écriture décimale de tous les entiers : 0,1234567891011121314151617181920... C'est un nombre simple – nous l'avons défini en deux lignes – et pourtant il est normal en base 10. Bien sûr, il existe des nombres équivalents dans toutes les bases de numération. David Champernowne, qui fut professeur de statistique et d'économie à l'Université d'Oxford, était un ami d'Alan Turing. En 1933, il démontra que son nombre était normal en base 10 et l'on peut penser que cette trouvaille incita Turing à s'intéresser lui aussi aux nombres « mélangés » introduits par Borel.

Si l'on met bout à bout l'écriture décimale des nombres premiers, ce qui donne 0,23571113171923..., on obtient à nouveau un nombre normal en base 10. Ce résultat, obtenu en 1946, est dû conjointement à Arthur Copeland et à Paul Erdős, le mathématicien prolixe qui a publié 1 525 articles mathématiques durant sa longue carrière.

D'autres familles de nombres normaux (dans une base fixée) ont été proposées depuis, dont le nombre de Stoneham $\alpha_{2,3}$ introduit en 1973 qui est normal en base 2 :

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

Nous y reviendrons. Les constructions du nombre de Champernowne et de ses variantes, et les quelques autres nombres normaux dans une base fixée connue ne résolvent cependant que le problème

des nombres normaux en base b , pour un b unique dans chaque cas. Rien ne dit que le nombre de Champernowne, normal en base 10, soit normal en base 11, 9 ou 2. Les calculs par ordinateur nous conduisent à penser que c'est le cas, mais nul n'a su le démontrer jusqu'ici. Comment trouver un nombre absolument normal ?

Algorithmiquement complexe, donc normal

La théorie algorithmique de l'information semble proposer une solution élégante à cette énigme.

La taille du plus petit programme qui engendre les n premiers chiffres d'un nombre réel est la complexité de Kolmogorov de ces n chiffres. Si elle vaut toujours à peu près n quand n tend vers l'infini, on dit que l'on a affaire à un nombre aléatoire au sens de Martin-Löf (voir l'article du mois de mars 2012 de cette rubrique). Or un nombre aléatoire dans ce sens est absolument normal, comme l'ont démontré Cristian Calude et Helmut Jürgensen en 2002.

Un tel résultat ne donnerait rien de plus que l'affirmation de Borel que les nombres absolument normaux sont partout, si on ne pouvait pas trouver de nombres réels aléatoires bien identifiés. C'est là que le nombre Ω [oméga] de Gregory Chaitin intervient. Ce nombre est la probabilité qu'une machine universelle de Turing s'arrête quand on lui donne un programme écrit en binaire dont les bits sont tirés au

1. L'existence de nombres absolument normaux, sans exemples

Émile Borel introduit en 1908 la notion de nombre absolument normal (la fréquence d'apparition d'une séquence de k chiffres dans le développement en base b est $1/b^k$). Il prouve l'existence de tels nombres, et même qu'ils sont majoritaires. Il est cependant lucide sur le malaise créé par ces nombres partout présents, mais introuvables en pratique. Il écrit : « La probabilité pour qu'un nombre soit absolument normal est [...] égale à l'unité. Dans l'état actuel de la



science, la détermination effective d'un nombre absolument normal paraît un problème des plus difficiles : il serait intéressant, soit de le résoudre en construisant un nombre absolument normal, ou en montrant qu'un nombre irrationnel connu est absolument normal, soit de démontrer que, parmi les nombres pouvant être réellement définis, aucun n'est absolument normal ; si paradoxal que paraisse cet énoncé, il n'est nullement incompatible avec le fait que la pro-

babilité pour qu'un nombre soit absolument normal est égale à l'unité. »

Aujourd'hui, malgré des avancées significatives, bien des mystères subsistent sur ces nombres quasi paradoxaux. Sa femme, Camille Marbo, relate dans son livre de souvenirs que, découragé de ne pas avoir trouvé un seul exemple de nombre normal dans toutes les bases de numération, Borel abandonna les « hautes mathématiques » pour s'intéresser aux probabilités et à la théorie des jeux.