

hasard. On sait construire de telles machines universelles (susceptibles de mener tout calcul) et donc, dès que l'une est choisie, le nombre Ω associé est fixé. C'est une probabilité, c'est-à-dire un nombre réel compris entre 0 et 1. On connaît ainsi des nombres absolument normaux et la méthode des machines universelles en définit même une infinité. Devons-nous être satisfaits ?

Malheureusement non : les nombres Ω de Chaitin sont non calculables. Ils sont parfaitement définis, mais à la question, devenue mathématique grâce aux travaux de Turing de 1936, « sont-ils calculables ? », la théorie répond non de manière formelle et définitive : aucun programme ne peut égrainer les chiffres d'un nombre Ω de Chaitin (alors que c'est possible pour $\sqrt{2}$, e ou π).

Un objet mathématique peut être parfaitement bien défini et unique (il existe un unique nombre Ω associé à chaque machine universelle de Turing), sans pour autant qu'on puisse en connaître le détail (par exemple les chiffres décimaux). Cela semble paradoxal, mais c'est l'une des

Peut-on définir un nombre réel dont on prouvera qu'il est absolument normal, et dont on pourra calculer à volonté les chiffres un à un ?

conséquences de l'indécidabilité logique mise en avant par Kurt Gödel en 1931 et complétée par les résultats de non-calculabilité de Turing de 1936 : « être bien défini » n'a pas pour conséquence « être calculable » et, par manque de chance, les nombres absolument normaux donnés par la théorie de la complexité sont justement dans la catégorie étrange des nombres « bien définis et non calculables ».

La question est alors reposée : peut-on définir un nombre réel dont on prouvera qu'il est absolument normal, et dont on calculera véritablement les chiffres un à un aussi loin qu'on le souhaite (par exemple en base 10) ?

Absolument normal et calculable ?

La réponse aurait pu être non, car les nombres calculables, qui sont en quantité infinie dénombrable, constituent un sous-ensemble négligeable de l'ensemble des nombres réels, et parce que leur intersection avec le sous-ensemble des nombres normaux pouvait donc être vide.

La réponse est positive, mais son histoire, un peu sinieuse, montre que même à propos de questions purement arithmétiques, sans liens apparents avec la logique, le mathématicien contemporain est obligé d'affiner ses concepts à l'aide des outils de cette logique qu'il a parfois regardée avec méfiance, comme le firent Henri Poincaré et Nicolas Bourbaki.

Tout d'abord, dès 1917, deux mathématiciens, Henri Lebesgue (1875-1941) et Waclaw Sierpinski (1882-1969), comprenant qu'il était souhaitable de rendre concrète la définition de Borel d'un nombre absolument normal, reprennent la preuve d'existence de Borel et l'expriment sous une forme constructive. Dans des articles écrits indépendamment, mais se recoupant sur certains points, chacun donne une formulation de la preuve d'existence de Borel d'une telle façon qu'à la fin, elle produise vraiment la définition d'un nombre précis absolument normal. Hélas, si leur démonstration caractérise un nombre par une propriété parfaitement identifiée et

2. Turing et la calculabilité

Alan Turing est né en 1912 et mort en 1954. De nombreuses manifestations ont été organisées cette année à l'occa-

sion du centième anniversaire de sa naissance. C'est l'un des premiers mathématiciens-logiciens-informaticiens (le premier

est probablement le philosophe allemand Leibniz, qui a étudié le système de numération binaire et construit une magnifique machine à calculer) ; ses travaux ont créé de nombreux liens entre les trois domaines : théorie mathématique de la calculabilité, indécidabilité algorithmique, corps des nombres réels calculables.

La question des nombres normaux a préoccupé Turing et, dans un texte non publié écrit autour de 1934 (www.turingarchive.org/viewer/?id=131&title=01a.1), il a donné les bases d'un algorithme permettant de calculer des nombres absolument normaux. La mise en forme définitive de son texte, redécouvert tardivement, n'a été effectuée qu'en 2002 par Verónica Becher et Santiago Figueira, informaticiens à l'Université de Buenos Aires.



Alan Turing était un athlète : ici, en 1946, il prend le bus avec les membres du Walton Athletic Club. Durant la Seconde Guerre mondiale, Turing participa au décodage du code allemand, ce qui fut décisif dans la victoire des Alliés.

formulée, elle n'en donne pas un moyen de calcul explicite. Bien que plus techniques et moins élégantes que la preuve par le biais de la théorie de la complexité (plus tardive), les preuves de Lebesgue et Sierpinski semblent être de la même nature : elles désignent de façon théorique des nombres dont il est prouvé qu'ils sont absolument normaux, mais dont le calcul des décimales n'est pas effectué et n'est peut-être pas possible. Nous allons voir cependant que ces démonstrations techniques possèdent un avantage sur celle de la théorie de la complexité.

Dans les motivations que Lebesgue donne au début de son travail, apparaît la question de l'axiome du choix, qui préoccupait les mathématiciens du début du XX^e siècle. L'axiome du choix affirme qu'à toute famille $\{A_i\}$ d'ensembles non vides est associé au moins un ensemble C ayant exactement un élément commun avec chaque A_i . Lebesgue exprime sa conviction que pour les définitions « qui ne sont pas illusoire, il est possible d'apporter des précisions qui conduisent à la définition d'un des ensembles [ou nombres] dont on démontre l'existence ». Or on sait aujourd'hui que certaines démonstrations d'existence ne peuvent pas être rendues constructives et seraient donc considérées illusoire par Lebesgue.

Paradoxalement, tel est justement le cas pour les ensembles non mesurables « au sens de Lebesgue » ! Les ensembles mesurables sont ceux constitués de nombres réels auxquels on peut attribuer une longueur, et dans le cas du plan, ceux auxquels on peut attribuer une aire. L'axiome du choix permet de prouver qu'il existe des ensembles non mesurables (n'ayant donc pas de longueur, ou d'aire), mais ne permet d'en définir aucun. Or en 1970, Robert Solovay a démontré qu'on pouvait, sans introduire de contradiction, ajouter à la théorie des ensembles habituelle l'axiome « tout ensemble est mesurable au sens de Lebesgue ». Cela signifie qu'aucune définition précise d'un ensemble non mesurable n'est possible dans le cadre de la théorie des ensembles sans l'axiome du choix. La démonstration classique de l'existence d'ensembles non mesurables

3. Les nombres normaux sont majoritaires

Borel a démontré que les nombres qui ne sont pas normaux en base 10 sont en quantité négligeable : en prenant un nombre réel au hasard entre 0 et 1, on tombera, sauf cas exceptionnellement rare, sur un nombre normal en base 10 (et même normal en toute base de numération).

C'est assez choquant, car on n'arrive même pas à démontrer que les nombres usuels comme π , e , $\log(2)$, $\sqrt{2}$, etc., sont normaux en base 10. Voici une façon de présenter le problème qui n'est pas une preuve rigoureuse, mais qui aide à saisir l'étonnante affirmation de Borel.

Tirer au hasard un nombre réel entre 0 et 1 revient à tirer au hasard une suite infinie de 0, 1, 2, ..., 9 avec un dé équitable, par exemple un icosaèdre où chaque chiffre apparaît sur

deux faces. Or quand on mène une telle suite de tirages équitables, chaque séquence de longueur k , par exemple la séquence 1789 de longueur 4, a la probabilité $1/10^k$ d'être obtenue à



chaque instant (1789 apparaît en moyenne une fois sur 10 000).

C'est une conséquence de la loi des grands nombres, car les événements sont indépendants et chaque chiffre se présente avec une probabilité $1/10$. Pour une séquence fixée de longueur k ,

la probabilité pour que la fréquence limite soit $1/10^k$ est donc de 100 %. Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est aussi négligeable, la probabilité qu'une suite infinie de tirages ne donne pas la fréquence limite $1/10^k$ pour une séquence de longueur k est nulle. Autrement dit, un nombre réel pris au hasard entre 0 et 1 a toutes les chances d'être normal en base 10. La conclusion s'étend à la propriété d'être absolument normal (normal dans toute base), car il y a une infinité dénombrable de bases de numération possibles (l'ensemble $NN(b)$ des nombres non normaux en base b est négligeable, donc la réunion de tous les $NN(b)$ aussi ; son complémentaire est l'ensemble des nombres absolument normaux).

est irrémédiablement non constructive : elle s'appuie sur l'axiome du choix, mais pire, sans lui, elle est impossible !

En quête d'un algorithme

Arrivés à ce point et conscients, grâce à la logique mathématique, de l'inconfort de la situation concernant les nombres absolument normaux, notre problème se résume alors ainsi :

– La preuve d'existence de Borel est non constructive, mais ne l'est pas aussi gravement que celle des ensembles non mesurables, car les reformulations de Lebesgue et de Sierpinski ainsi que les approches par la théorie de la complexité donnent des définitions précises de nombres absolument normaux.

– Cependant, la logique nous a aussi appris qu'être bien défini n'implique pas être calculable. Reste donc la question, passée sous silence par Lebesgue et Sierpinski faute d'idées assez claires sur le sujet, et devenue parfaitement mathématique grâce à Turing qui introduisit le concept de fonction

calculable et de nombre réel calculable : existe-t-il des nombres absolument normaux et calculables ?

Celui grâce à qui la question de l'existence a pris une forme algorithmique claire et mathématique est aussi celui qui la résout positivement pour les nombres absolument normaux dans son article non publié de 1934. Turing refait en quelque sorte le travail de Sierpinski et Lebesgue, mais il cherche à aller plus loin et veille à définir un nombre absolument normal accompagné d'un algorithme de calcul. Malheureusement, ce qu'on a retrouvé de l'article de Turing ne va pas tout à fait au bout et reste incomplet sur un point qui ne sera définitivement éclairci qu'en 2002 par Verónica Becher et Santiago Figueira. Enfin rendue parfaitement constructive et calculable, la démonstration d'existence des nombres absolument normaux de Borel est-elle pour autant définitive ?

Non, la satisfaction éprouvée par ce succès récent est atténuée par deux remarques qui suggèrent qu'il reste encore du travail à faire et que les mathématiciens, les logiciens