4. La complexité des irrationnels algébriques

Le magnifique et puissant théorème de Adamczewski et Bugeaud permet de démontrer la conjecture de Loxton et van den Porten que tout nombre dont les chiffres en base b sont produits par un automate fini est soit rationnel, soit transcendant (non solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers). Cette conjecture signifie que les nombres algébriques (solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers) sont ou bien rationnels (et leurs chiffres sont ultimement périodiques, donc très simples), ou bien complexes (leurs chiffres ne peuvent être écrits par un automate fini).

Le théorème donne des informations sur la complexité des chiffres d'un nombre réel mesurée par la fonction $p_b(m)$. Si x est un nombre réel écrit en base b, on note $p_b(m)$ (et on dénomme fonction complexité de x) le nombre de séquences différentes de longueur m rencontrées dans son développement en base b.

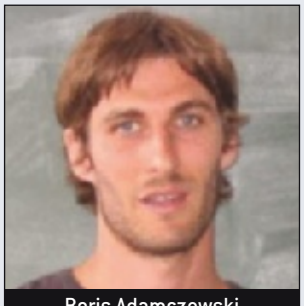
Par exemple, 1/5 s'écrit, en base 2, 0,0011001100110011... Le nombre de mots de longueur 3 rencontrés dans ce développement est 4, puisque les seules séquences de longueur 3 qu'on trouve sont 001, 011, 110 et 100. Il s'ensuit que $p_2(3) = 4$ pour le nombre 1/5. Notons que $p_2(m)$ est inférieur ou égal à 2^m, et que $p_b(m)$ est inférieur à b^m.

THÉORÈME DE ADAMCZEWSKI ET BUGEAUD. Si x est un nombre irrationnel algébrique écrit en base b, alors $p_b(m)/m$ croît indéfiniment (pour m assez grand, $p_b(m)/m$ dépasse 10, et ne revient jamais en dessous, plus loin il dépasse 100, etc.).

Dit autrement, la variété des séquences de longueur m qu'on trouve dans le développement d'un nombre algébrique irrationnel est grande : elle augmente plus vite que n'importe quelle fonction linéaire. Ce théorème ne permet pas encore de prouver que les nombres irrationnels algébriques sont normaux, ce que l'on pense vrai, mais on tient là une affirmation forte sur les décimales des nombres algébriques irrationnels qui nous approche un peu du but.

Le théorème est aussi un outil puissant pour démontrer que des nombres sont transcendants et il permet de retrouver le résultat que le nombre de Prouhet-Thue-Morse 0,0110100110010110..., souvent rencontré en arithmétique, est transcendant (ce nombre est obtenu en écrivant, après la virgule, 0 puis le complément 1, ce qui donne 01 ; on ajoute alors le complément 10, ce qui donne 0110 ; on ajoute encore le complément 1001, ce qui donne 01101001 ; et ainsi de suite).


Yann Bugeaud


Boris Adamczewski

et les informaticiens n'en ont pas fini avec les nombres absolument normaux.

Quatre niveaux d'existence mathématique

D'une part, l'algorithme explicité est affreusement inefficace : il est « doublement exponentiel », ce qui signifie que pour connaître n décimales du nombre absolument normal qu'il calcule, il faut le faire fonctionner durant un temps en gros proportionnel à $\exp(\exp(n))$ (ou 2 à la puissance 2^n), qui est une fonction de la variable n à croissance extrêmement rapide. À ma connaissance, personnen'a essayé de produire des décimales du nombre calculable que l'algorithme de Turing-Becher-Figueira égraine indéfiniment... en théorie. Cette double exponentielle illustre un quatrième niveau dans les degrés de l'existence mathématique : après l'existence pure (preuve de Borel), l'existence avec caractérisation (théorie de la complexité ou preuves de Lebesgue et Sierpinski), l'existence avec algorithme de calcul (Turing, Becher, Figueira), on aimerait bien atteindre l'existence avec un algorithme de calcul praticable et donnant donc « pour de vrai » les décimales d'un nombre absolument normal qu'on pourrait enfin voir écrit sur une page imprimée !

La deuxième raison d'insatisfaction est que la question posée à propos des nombres absolument normaux n'est pas tant celle d'en définir un et de le calculer, mais plus simplement : $\sqrt{2}$, e ou π, ou les nombres irrationnels que l'on connaît, et dont l'étude des chiffres suggère qu'ils sont absolument normaux, le sont-ils vraiment ?

Sur ces dernières questions, des progrès ont été faits assez récemment. Bien sûr le calcul des chiffres de π, qui a maintenant été mené jusqu'à la décimale en position $10^{13} = 10\,000\,000\,000\,000$, permet d'étudier empiriquement la question. Un travail portant sur les quatre premiers milliards de ces chiffres et utilisant une modélisation à l'aide d'un processus de Poisson a conduit David Bailey, Jonathan Borwein, C. Calude, Michael Dinneen, Monica Dimiteescu et Alex Yee à la conclusion suivante : « Il est extraordinairement improbable que π ne soit pas normal en base 16, étant donné la normalité de son segment initial. » Malheureusement, le nombre décimal qui aurait le même développement pendant quatre milliards de décimales et qui se poursuivrait par des 0 aurait lui aussi conduit à la même conclusion, qui n'est donc en rien l'esquisse d'une preuve.

Vers la normalité de log (2) ou de π

D. Bailey et Richard Crandal ont proposé une condition simple assurant la normalité du nombre $\log(2)$ (qui, comme $\sqrt{2}$, e ou π, intéresse particulièrement les mathématiciens). Si la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_n = (2x_{n-1} + 1/n) \bmod 1$ est équidistribuée (x_n se retrouve dans l'intervalle $[a, b]$ à la fréquence $b-a$, quels que soient les nombres réels a et b tels que $0 < a \leq b < 1$), alors $\log(2)$ est normal en base 10. Même si la condition semble plus simple à établir que