

la normalité de $\log\{2\}$, elle résiste pour l'instant, et l'on ne peut donc pas affirmer que $\log\{2\}$ est normal. Une condition du même type existe pour π . Bien qu'un peu plus complexe, elle donne l'espoir qu'on s'approche d'une preuve que π est normal en base 2.

Et les nombres absolument non normaux ? Puisqu'on n'arrive pas à expliciter un nombre absolument normal, peut-on au moins en expliciter un qui soit absolument non normal (c'est-à-dire qui ne soit normal dans aucune base b , pour b supérieur ou égal à 2) ? Cette fois, la réponse est oui : Greg Martin, à l'Université de Toronto, a réussi en 2001 à mener une telle construction pour un nombre irrationnel et calculable de manière effective. Le nombre noté ici α possède une définition courte :

$$d_2 = 2^2, \quad d_j = j^{d_{j-1}/(j-1)}, \\ \alpha = \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{d_j}\right)$$

Son développement décimal est : 0,65624999999569999...99999985284 04201690728... [avec 23 747 291 559 fois le 9 après 9956].

Normalité mixte...

Des progrès viennent aussi d'être réalisés concernant les nombres normaux dans certaines bases et pas dans d'autres.

Deux entiers a et b sont dits multiplicativement dépendants s'il existe des puissances de a et de b égales ($a^m = b^n$). Quand c'est le cas, on montre qu'un nombre normal en base a l'est aussi en base b . En particulier, « être normal en base 1 000 » est donc équivalent à « être normal en base 10, 100, ou 100 000 ». On ne sait écrire explicitement les décimales d'aucun nombre qui soit normal en deux bases de numération indépendantes. Bien sûr, si l'algorithme pour calculer le nombre de Turing-Becher-Figueira est perfectionné et mis en œuvre, il donnera un tel nombre.

Depuis 1959, on sait cependant, grâce aux travaux du mathématicien anglais John Cassel, que si a et b sont indépendants, alors il existe des nombres normaux en base a qui ne le sont pas en base b . Un résultat

bien plus général de Wolfgang Schmidt (1962) indique même que si A et B sont deux ensembles d'entiers supérieurs ou égaux à 2, tels que les nombres dépendants ne soient jamais séparés (quand a et b sont dépendants, ils sont tous deux dans A , ou tous deux dans B), alors il existe un nombre x qui est normal dans toute base a de A , et non normal dans toute base b de B . Ces nombres x sont cependant du même type que ceux de Borel : on sait qu'ils existent sans qu'on puisse les définir simplement, ni bien sûr les calculer.

En 2012, on a toutefois réussi à exhiber des nombres calculables dont on a montré qu'ils étaient normaux en base 2 et non normaux en base 6 (2 et 6 sont indépendants). Bien que minuscule en apparence, il s'agit là d'un progrès remarquable, d'autant que cette fois les nombres en question se calculent pour de vrai ! Le nombre de Stoneham dont nous redonnons la définition :

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

est normal en base 2 et non normal en base 6. Un autre progrès récent (2007) est le théorème de Boris Adamczewski, de l'Université Lyon 1, et Yann Bugeaud, de l'Université de Strasbourg (voir l'encadré 4).

Ainsi, le monde mathématique est étrange ; on peut y formuler des questions très simples et très naturelles (toutes celles concernant les nombres normaux le sont) et buter dessus longuement : c'est par exemple le cas pour la question « π est-il normal en base 10 ? ». On peut démontrer que des objets existent sans que l'on puisse en exhiber un seul. C'est le cas des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue. On peut aussi définir parfaitement un objet et être incapable d'en connaître le détail, soit parce qu'il est incalculable (comme les nombres absolument normaux du type Ω), soit parce que l'algorithme qui le construit est si inefficace qu'on n'en tire concrètement rien (comme le nombre absolument normal de Turing-Becher-Figueira). Pourtant, dans ce labyrinthe de quasi-paradoxes, les chercheurs réussissent à se frayer un chemin et avancent à petits pas... sans jamais renoncer. ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Y. Bugeaud, *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, 2012.

D. H. Bailey *et al.*, *Normality and the digits of pi*, *Experimental Mathematics*, à paraître, 2012.

B. Adamczewski et Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers. Expansions in integer bases*, *Annals of Mathematics*, vol. 165(2), pp. 547-565, 2007.

D. H. Bailey *et al.*, *On the binary expansion of algebraic numbers*, *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. 16(3), pp. 487-518, 2004.

V. Becher et S. Figueira, *An example of a computable absolutely normal number*, *Theoretical Computer Science*, vol. 270, pp. 947-958, 2002.