

la normalité de $\log\{2\}$, elle résiste pour l'instant, et l'on ne peut donc pas affirmer que $\log\{2\}$ est normal. Une condition du même type existe pour π . Bien qu'un peu plus complexe, elle donne l'espoir qu'on s'approche d'une preuve que π est normal en base 2.

Et les nombres absolument non normaux ? Puisqu'on n'arrive pas à expliciter un nombre absolument normal, peut-on au moins en expliciter un qui soit absolument non normal (c'est-à-dire qui ne soit normal dans aucune base b , pour b supérieur ou égal à 2) ? Cette fois, la réponse est oui : Greg Martin, à l'Université de Toronto, a réussi en 2001 à mener une telle construction pour un nombre irrationnel et calculable de manière effective. Le nombre noté ici α possède une définition courte :

$$d_2 = 2^2, \quad d_j = j^{d_{j-1}/(j-1)}, \\ \alpha = \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{d_j}\right)$$

Son développement décimal est :
0,656249999995699999...99999985284
04201690728... [avec 23 747 291 559 fois
le 9 après 9956].

Normalité mixte...

Des progrès viennent aussi d'être réalisés concernant les nombres normaux dans certaines bases et pas dans d'autres.

Deux entiers a et b sont dits multiplicativement dépendants s'il existe des puissances de a et de b égales ($a^m = b^n$). Quand c'est le cas, on montre qu'un nombre normal en base a l'est aussi en base b . En particulier, « être normal en base 1 000 » est donc équivalent à « être normal en base 10, 100, ou 100 000 ». On ne sait écrire explicitement les décimales d'aucun nombre qui soit normal en deux bases de numération indépendantes. Bien sûr, si l'algorithme pour calculer le nombre de Turing-Becher-Figueira est perfectionné et mis en œuvre, il donnera un tel nombre.

Depuis 1959, on sait cependant, grâce aux travaux du mathématicien anglais John Cassel, que si a et b sont indépendants, alors il existe des nombres normaux en base a qui ne le sont pas en base b . Un résultat

bien plus général de Wolfgang Schmidt (1962) indique même que si A et B sont deux ensembles d'entiers supérieurs ou égaux à 2, tels que les nombres dépendants ne soient jamais séparés (quand a et b sont dépendants, ils sont tous deux dans A , ou tous deux dans B), alors il existe un nombre x qui est normal dans toute base a de A , et non normal dans toute base b de B . Ces nombres x sont cependant du même type que ceux de Borel : on sait qu'ils existent sans qu'on puisse les définir simplement, ni bien sûr les calculer.

En 2012, on a toutefois réussi à exhiber des nombres calculables dont on a montré qu'ils étaient normaux en base 2 et non normaux en base 6 (2 et 6 sont indépendants). Bien que minuscule en apparence, il s'agit là d'un progrès remarquable, d'autant que cette fois les nombres en question se calculent pour de vrai ! Le nombre de Stoneham dont nous redonnons la définition :

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

est normal en base 2 et non normal en base 6. Un autre progrès récent (2007) est le théorème de Boris Adamczewski, de l'Université Lyon 1, et Yann Bugeaud, de l'Université de Strasbourg (voir l'encadré 4).

Ainsi, le monde mathématique est étrange ; on peut y formuler des questions très simples et très naturelles (toutes celles concernant les nombres normaux le sont) et buter dessus longuement : c'est par exemple le cas pour la question « π est-il normal en base 10 ? ». On peut démontrer que des objets existent sans que l'on puisse en exhiber un seul. C'est le cas des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue. On peut aussi définir parfaitement un objet et être incapable d'en connaître le détail, soit parce qu'il est incalculable (comme les nombres absolument normaux du type Ω), soit parce que l'algorithme qui le construit est si inefficace qu'on n'en tire concrètement rien (comme le nombre absolument normal de Turing-Becher-Figueira). Pourtant, dans ce labyrinthe de quasi-paradoxes, les chercheurs réussissent à se frayer un chemin et avancent à petits pas... sans jamais renoncer. ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
à l'Université
de Lille
et chercheur
au Laboratoire
d'informatique fondamentale
de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Y. Bugeaud, *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, 2012.

D. H. Bailey *et al.*, *Normality and the digits of pi*, *Experimental Mathematics*, à paraître, 2012.

B. Adamczewski et Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers. Expansions in integer bases*, *Annals of Mathematics*, vol. 165(2), pp. 547-565, 2007.

D. H. Bailey *et al.*, *On the binary expansion of algebraic numbers*, *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. 16(3), pp. 487-518, 2004.

V. Becher et S. Figueira, *An example of a computable absolutely normal number*, *Theoretical Computer Science*, vol. 270, pp. 947-958, 2002.

SCIENCE & FICTION

L'homme du futur dans la science-fiction

Les diverses évolutions de l'humanité envisagées par les cinéastes sont-elles vraisemblables ?

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Toute espèce vivante évolue et se transforme. *Homo sapiens* n'échappe pas à la règle ; il s'est modifié depuis que ses premiers représentants sont apparus en Afrique il y a environ 200 000 ans. Les paléoanthropologues sont capables de raconter son histoire. Mais la question de l'évolution future de l'espèce humaine est plus embarrassante.

Mutations génétiques ou altérations brutales de l'environnement font partie des nombreux facteurs aléatoires qui contraignent l'évolution et la rendent difficilement modélisable. Dissserter sur l'évolution future des espèces relève donc d'une extrapolation qui n'est plus tout à fait scientifique. À défaut de savoir à quoi ressembleront les humains dans 500 000 ans, contentons-nous d'observer comment les auteurs de science-fiction les ont envisagés.

Cinq espèces d'*Homo futuralis*

De H. G. Wells à René Barjavel, d'Aldous Huxley à William Gibson en passant par Philip K. Dick, ils sont nombreux à avoir imaginé l'humanité de demain. Cinq grandes tendances émergent de leurs réflexions. Que ces tendances cachent d'intéressantes critiques sociétales ou nos désirs de conquête, nous leur avons donné des noms pour mieux les évaluer à la lumière de

nos connaissances : examinons donc *Homo socialis*, humain hyperspécialisé au sein d'une société souvent totalitaire ; *Homo artificialis*, cyborg résultant de l'intégration de la machine dans le vivant ; *Homo trogloditicus* vivant sous terre ; *Homo aquaticus* qui retourne habiter les océans ; et enfin *Homo sideralis* adapté à la conquête de l'espace.

Tout d'abord, *Homo socialis* correspond souvent à un humain physiquement « régressé », voire amorphe : son corps est très spécialisé dans la réalisation d'une tâche bien déterminée, par exemple le travail, l'alimentation ou encore la reproduction, tâche qui s'effectue uniquement au profit du groupe. Chaque individu est alors noyé dans la masse, totalement dépendant des autres et souvent lobotomisé.

Ce scénario fait le parallèle entre deux types de sociétés très hiérarchisées : celles qui relèvent essentiellement de la culture — la nôtre — et celles qui relèvent de la nature, telles les multiples colonies animales — fourmis, termites, abeilles, cnidaires — où chaque individu est souvent en coévolution. D'ailleurs, *Homo socialis* a parfois une morphologie d'insectoïde et se multiplie par parthénogenèse (la femelle se reproduit sans le mâle et donne une multitude de rejetons souvent identiques). En termes d'évolution biologique, ce scénario n'est guère crédible, car il faudrait une pression cultu-

relle bien trop importante pour engendrer spontanément de telles spécialisations morphologiques. Certains auteurs, tel Huxley dans son *Meilleur des mondes*, proposent d'utiliser des manipulations génétiques pour aboutir à ce résultat.

Des hypothèses pour la survie de l'humanité

Restons « en société » avec *Homo artificialis* qui n'est autre qu'un cyborg, c'est-à-dire un humain où sont intégrés des prothèses, puces électroniques, appareils auditifs et sensoriels, etc. Le policier « technologiquement modifié » du film *Robocop* est sans doute l'un des cyborgs les plus célèbres du cinéma. Dans les années 1990, le mathématicien et auteur de science-fiction Vernor Vinge contribua à populariser le concept de singularité selon lequel la convergence entre nanotechnologie, biologie et informatique conduira à une croissance technologique d'un ordre supérieur. V. Vinge postule que l'humanité aura bientôt les moyens de créer une intelligence artificielle, mettant un terme à l'hégémonie humaine. C'est ce qui se passe dans le film *Terminator*, où le réseau planétaire *Skynet* devient conscient et décide d'exterminer



DEUX HOMMES DU FUTUR IMAGINÉS

par les cinéastes : *Homo aquaticus* (à gauche), vivant dans les profondeurs de l'océan, et *Homo sideralensis* (à droite), qui, pour survivre à une catastrophe terrestre, colonise l'espace. Sa longévité lui permet d'effectuer sans difficultés de longs voyages intersidéraux.

l'humanité. *Homo artificialis* apparaît souvent dans un contexte sombre, où l'humanité est rattrapée par sa technologie.

Que dire d'*Homo troglodicus*, à la conquête d'environnements improbables ? Sous terre, l'archétype en est le Morlock, l'un des deux descendants de l'espèce humaine que Wells dépeint dans son roman *La machine à explorer le temps* (1895). Ce monstre fuit la lumière solaire, ce qui donne à sa peau un aspect laiteux, et il a des yeux rouges adaptés à l'obscurité. Avec des dents proéminentes et des grosses mains, il évoque le rat-taupe. Le cadre de vie d'*Homo troglodicus* varie de la simple caverne à la mégapole souterraine, parfois empreinte d'un rétrofuturisme qui évoque la société industrielle du XIX^e siècle. L'homme troglodyte, souvent sauvage et méchant, symbolise le retour à la bestialité, l'échec de la modernité et du progrès technique. Dans de nombreux scénarios, l'humanité devient troglodyte à la suite d'un cataclysme global, une guerre nucléaire par exemple.

Dans les mers, *Homo aquaticus* offre une vision plus optimiste, voire idyllique, d'un futur où les humains deviennent capables d'habiter les profondeurs des océans. Étroitement liée au mythe de l'Atlantide et des cités englouties, cette idée puiserait également sa source dans l'hypothèse paléontologique du « primate aqua-

tique », très en vogue dans les années 1960 et selon laquelle nos ancêtres auraient séjourné un temps dans l'eau, en milieu marin ou côtier. Morphologiquement parlant, *Homo aquaticus* ressemble souvent à un hybride homme-poisson muni de branchies, de nageoires ou de palmures selon les auteurs. Notons toutefois que l'évolution est irréversible, et que nous ne redeviendrons jamais « poissons ».

Sous les eaux ou dans l'espace ?

Enfin, *Homo sideralensis* ouvre d'autres horizons. Il correspond sans doute au scénario qui comporte le plus d'espoirs, révélant notre prise de conscience d'une Terre dont les jours sont comptés. Notre planète est, par exemple, sous la menace permanente d'une chute d'astéroïde, tel celui qui précipita la fin des dinosaures non aviens, il y a 65 millions d'années. Si cela devait se reproduire, une solution de repli serait bienvenue. Comme le cyborg, *Homo sideralensis* est résolument tourné vers la technologie, pour quitter la Terre et augmenter les chances de survie de l'espèce humaine. Plutôt pacifique et très intelligent, au crâne imposant, il est souvent mince et revêtu d'une combinaison brillante. Sa morphologie évoque celle des « petits gris », aliens filiformes à grosses

têtes qui, dans de nombreux scénarios de science-fiction, se seraient déjà installés sur Terre. En outre, *Homo sideralensis*, lorsqu'il n'est pas en état d'hibernation artificielle, jouit souvent d'une longévité de plusieurs centaines d'années lui permettant de voyager dans l'espace intersidéral.

Dès lors, peut-on s'aventurer à dire à quoi ressemblera l'humain du futur ? Concernant l'évolution de l'humanité à long terme, la prévision la plus probable est l'extinction, car nous savons que les espèces, comme les civilisations, sont mortelles : elles ont des durées de vie limitées, et, même si les estimations sont variables, tous les scientifiques s'accordent à dire qu'une espèce de mammifère dure moins longtemps qu'une espèce d'« invertébré ».

Mais les humains inventent des outils qui modifient la façon dont ils se reproduisent ou dont ils se soignent, surtout sous nos latitudes. Avec la thérapie génique, l'humanité pourra-t-elle modifier son patrimoine génétique pour s'adapter aux modifications de son milieu naturel ? Et si, grâce à son pouvoir sur la matière inerte – par la technique – et vivante – par la médecine et la génétique – l'humanité modifiait les conditions mêmes de son évolution ? ■

J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.