

physique forme aujourd'hui, pour l'essentiel, un ensemble parfaitement harmonieux, un ensemble pratiquement achevé. Il n'y a plus rien de nouveau à découvrir. Tout ce qui reste à faire, ce sont des mesures de plus en plus précises».

Hilbert ne pensait nullement que les mathématiques étaient achevées puisqu'il proposa, en 1900, une liste de 23 grands problèmes ouverts. Il travailla aussi sur un programme visant à développer une théorie de la démonstration, afin de donner des fondements solides aux mathématiques. Selon lui, toute vérité mathématique devait pouvoir être démontrée, et cela d'une façon qui ne laisse aucun doute quant à la validité de la démonstration.

## Éliminer le doute en mathématiques

S'opposant à du Bois-Reymond, Hilbert déclara : «En mathématiques, il ne doit pas y avoir d'*ignorabimus*.» On retrouve ces projets dans le courant de pensée des empiristes logiques du cercle de Vienne, un groupe de philosophes des années 1920



1. KURT GÖDEL (1906-1978), mathématicien autrichien qui prit la nationalité américaine, a énoncé et démontré en 1931 deux théorèmes d'incomplétude. Ils indiquent que toute mathématique suffisamment riche pour contenir l'arithmétique contient des énoncés indécidables, et que la non-contradiction du système est l'un d'eux.

G. Guerrato

qui pensaient que le savoir pouvait être assis sur des fondations solides.

Selon cette école de pensée, il devrait être possible de construire le savoir de proche en proche, en s'assurant par vérification, à chaque étape de sa construction, que les théories élaborées sont vraies. L'édifice total ainsi constitué serait une description adéquate de la réalité, non seulement dans ses manifestations empiriques, mais aussi dans sa structure profonde. Par cette méthode, il n'y aurait pas le moindre doute sur la véracité des énoncés. Ainsi, la science serait capable de prévoir qualitativement et quantitativement les événements futurs avec une précision arbitraire et sur une durée infinie.

La science du XX<sup>e</sup> siècle a rapidement détruit ces espoirs. Comme nous l'avons vu, Gödel a mis fin au programme de Hilbert à travers la démonstration de ses célèbres théorèmes d'incomplétude. Ces derniers prouvaient que, dans tout cadre mathématique, il existe des énoncés qui sont vrais, mais qu'il est impossible de prouver dans ce cadre.

Par ailleurs, la physique du XIX<sup>e</sup> siècle, constituée essentiellement de la mécanique newtonienne, de la thermodynamique et de l'électromagnétisme, a donné naissance à deux révolutions majeures, la théorie de la relativité et la théorie quantique. Ces édifices, auxquels il convient d'ajouter la physique des systèmes non linéaires qui s'est beaucoup développée dans les années 1970-1990, ont porté un coup fatal aux espoirs de Kelvin.

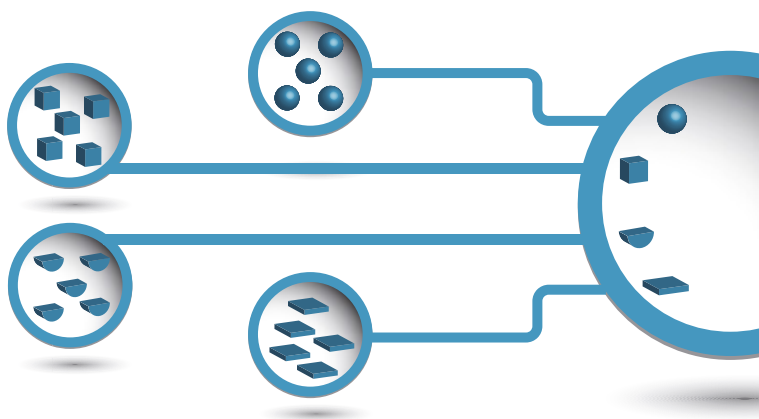
## La science construit ses propres limites

L'idée de tout expliquer n'est aujourd'hui plus tenable en raison de la mise en évidence, par la science elle-même, de limites infranchissables à son propre discours. Il est commode de classer ces limites en quatre catégories que nous développerons dans la suite. Les limites *constructives* sont relatives à l'impossibilité de construire un discours scientifique qui échappe à tout doute et qui repose sur des fondements sûrs. Les limites *prédictives* montrent l'impossibilité de prévoir certains phénomènes avec une précision arbitraire sur une échelle de temps indéterminée. On retrouve ce type de limite en physique, par exemple dans la théorie du chaos. Les limites *cognitives* concernent l'existence de domaines qui resteront hors de portée du savoir. De telles

### L'AXIOME DU CHOIX

L'axiome du choix stipule qu'en présence de plusieurs ensembles non vides, il est possible de choisir un élément de chaque ensemble pour former un nouvel ensemble. Plus formellement, pour toute famille d'ensembles, il existe une fonction de choix qui associe à chaque ensemble un de ses éléments. Cet axiome est trivial et n'est pas nécessaire pour les ensembles finis. En revanche, il est utile pour des démonstrations mettant en jeu des ensembles infinis. L'axiome du choix est souvent ajouté à l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel en théorie des ensembles. Il était d'ailleurs implicitement utilisé jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, avant d'être rigoureusement formalisé par Ernst Zermelo.

Cependant, cet axiome est controversé. Les mathématiciens intuitionnistes préfèrent ne pas l'utiliser. En effet, l'axiome du choix assure l'existence de certains objets, mais n'en donne pas une méthode de construction, ce qui est peu satisfaisant du point de vue des intuitionnistes.



limites apparaissent en mathématiques dans l'étude de nombres parfaitement définis, mais qui ne sont pas calculables – des nombres dont on ne peut déterminer, au mieux, qu'un nombre fini de décimales. Enfin, les limites *ontologiques* éliminent quelques entités conceptuelles en montrant leur inconsistance ou en les situant en dehors du champ d'appréhension du discours scientifique. C'est le cas en mécanique quantique avec le rôle privilégié de l'observateur ou, en mathématiques, avec la question de l'existence ou non de certains objets.

Ces limites se distinguent de celles résultant d'obstacles pratiques. Ces derniers sont par exemple liés à des données trop nombreuses pour être traitées, ou, au contraire, à leur insuffisance ; ils peuvent aussi être liés à des temps de calcul qui seraient beaucoup trop longs. Ces limites peuvent être repoussées (mais probablement pas abolies) par l'amélioration des techniques de mesure et de calcul, ou la collecte de nouvelles données. Les limites dont on traitera ici sont d'un autre type : elles sont intimement liées à la nature et à la construction des théories mathématiques et physiques, et elles ne pourront pas être repoussées par un progrès technique.

## Des difficultés liées aux ensembles infinis

Les mathématiques sont par essence la discipline scientifique dont on attend le plus de certitude. Bien que non empiriques, elles ne sont censées dire que des choses vraies et doivent permettre de démontrer tout ce qui est vrai. C'était, en tout cas, le vœu de Hilbert et son refus de tout *ignorabilis* en mathématiques. Son programme visait à donner à ce champ scientifique une théorie de la démonstration qui ne laisse subsister aucun doute quant à la validité d'une preuve. Cette volonté était motivée par des débats animés parmi les mathématiciens de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et le début du XX<sup>e</sup>, qui portaient sur certaines démonstrations acceptées par les uns et rejetées par d'autres. Il était notamment question de l'axiome du choix, formalisé par le mathématicien allemand Ernst Zermelo, et sur lequel reposaient de nombreuses démonstrations (voir l'encadré page 46).

Les sujets disputés étaient souvent des résultats faisant appel à des quantités ou des ensembles infinis. Pour éviter ce type de controverses, le programme de Hilbert visait à construire les mathéma-

## Le nombre $\Omega$ de Gregory Chaitin

Le nombre  $\Omega$  de Chaitin est défini comme la probabilité qu'une machine de Turing, exécutant un programme tiré au hasard, s'arrête en un temps fini. Un programme aléatoire s'exprime comme une suite binaire de 0 et de 1 où chaque bit est tiré au hasard. Le programme doit être autodélimité, c'est-à-dire contenir un signal de fin de programme, telle une séquence de bits, par exemple 1111. Il est possible d'estimer  $\Omega$  en répétant plusieurs fois le tirage aléatoire de program-

mes. Mais  $\Omega$  n'est accessible que théoriquement, car il faudrait pouvoir tirer indéfiniment des programmes. De surcroît, il n'est pas possible de savoir si un programme aléatoire ne s'arrête jamais (c'est un problème indécidable). En pratique, on décide d'un temps d'exécution au-delà duquel on considère que le programme ne s'arrête pas.

Le nombre  $\Omega$  est une probabilité ; il est donc compris entre 0 et 1, et peut être écrit en une suite binaire infinie de la

forme  $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ . Il est aussi non calculable par un algorithme et ses chiffres, sauf un nombre fini d'entre eux, sont indécidables dans le sens suivant. Un système formel raisonnable peut déterminer des chiffres de  $\Omega$ , c'est-à-dire démontrer certains énoncés du type «  $a_i = 1$  » ou «  $a_i = 0$  », mais un système raisonnable ne peut démontrer qu'un nombre fini d'énoncés de ce genre. Pour la plupart des chiffres  $a_i$  de  $\Omega$ , le système ne peut prouver ni un énoncé ni son contraire.

### ■ L'AUTEUR



Hervé ZWIRN est professeur associé à l'UFR de physique de l'Université Paris-Diderot et président du Collège de physique et de philosophie.

### ■ BIBLIOGRAPHIE

J.-P. Delahaye, *La logique, un aiguillon pour la pensée*, Belin-Pour la Science, 2012.

Les grands problèmes mathématiques, *Dossier Pour la Science*, n° 74 janvier-mars 2012.

H. Zwirn, *Les systèmes complexes*, Odile Jacob, 2006.

Les chemins de la logique, *Dossier Pour la Science* n° 49, octobre-décembre 2005.

G. Guerreiro, Gödel, *Les Génies de la Science*, n° 20, août-novembre 2004.

H. Zwirn, *Les limites de la connaissance*, Odile Jacob, 2000.

### ■ SUR LE WEB

Site décrivant la construction d'une machine de Turing : [www.legoturingmachine.org/](http://www.legoturingmachine.org/)

tiques sur une théorie de la preuve dite « finitiste » en ce sens qu'elle évitait le recours à tout infini considéré dans sa globalité. Hilbert espérait montrer que dans un tel édifice, toute vérité mathématique aurait été démontrable et cela d'une façon convaincante pour tous les mathématiciens. Cependant, en publiant ses théorèmes d'incomplétude en 1931, Gödel montra que cet espoir était vain.

Le premier théorème montre que dans tout système formel – un ensemble d'objets associé à un nombre fini d'axiomes et de règles de manipulation de symboles – contenant l'arithmétique, il existe des propositions vraies qu'on ne peut ni prouver ni réfuter. On les nomme des indécidables. Le second théorème énonce que la non-contradiction du système – c'est-à-dire que celui-ci ne conduit pas à la fois à une affirmation et à son contraire – est elle-même une proposition indécidable.

Cela signifie qu'il faut renoncer à l'espoir de prouver toute proposition vraie d'un système formel. Tout système formel contiendra des propositions qui, bien que vraies, ne pourront jamais être démontrées. De plus, cela montre qu'il est impossible de démontrer qu'un système formel n'est pas contradictoire en s'appuyant sur des démonstrations ne sortant pas du cadre de ce système. On ne peut donc jamais être sûr que le système formel utilisé n'est pas contradictoire, sauf à tenter de le prouver en s'appuyant sur un système formel plus large ; mais dans ce cas, c'est la non-contradiction du système élargi qui est, à son tour, mise en question.

Ces théorèmes établissent une limite constructive : il est impossible de construire