

limites apparaissent en mathématiques dans l'étude de nombres parfaitement définis, mais qui ne sont pas calculables – des nombres dont on ne peut déterminer, au mieux, qu'un nombre fini de décimales. Enfin, les limites *ontologiques* éliminent quelques entités conceptuelles en montrant leur inconsistance ou en les situant en dehors du champ d'appréhension du discours scientifique. C'est le cas en mécanique quantique avec le rôle privilégié de l'observateur ou, en mathématiques, avec la question de l'existence ou non de certains objets.

Ces limites se distinguent de celles résultant d'obstacles pratiques. Ces derniers sont par exemple liés à des données trop nombreuses pour être traitées, ou, au contraire, à leur insuffisance ; ils peuvent aussi être liés à des temps de calcul qui seraient beaucoup trop longs. Ces limites peuvent être repoussées (mais probablement pas abolies) par l'amélioration des techniques de mesure et de calcul, ou la collecte de nouvelles données. Les limites dont on traitera ici sont d'un autre type : elles sont intimement liées à la nature et à la construction des théories mathématiques et physiques, et elles ne pourront pas être repoussées par un progrès technique.

Des difficultés liées aux ensembles infinis

Les mathématiques sont par essence la discipline scientifique dont on attend le plus de certitude. Bien que non empiriques, elles ne sont censées dire que des choses vraies et doivent permettre de démontrer tout ce qui est vrai. C'était, en tout cas, le vœu de Hilbert et son refus de tout *ignorabilimus* en mathématiques. Son programme visait à donner à ce champ scientifique une théorie de la démonstration qui ne laisse subsister aucun doute quant à la validité d'une preuve. Cette volonté était motivée par des débats animés parmi les mathématiciens de la fin du XIX^e siècle et le début du XX^e, qui portaient sur certaines démonstrations acceptées par les uns et rejetées par d'autres. Il était notamment question de l'axiome du choix, formalisé par le mathématicien allemand Ernst Zermelo, et sur lequel reposaient de nombreuses démonstrations (voir l'encadré page 46).

Les sujets disputés étaient souvent des résultats faisant appel à des quantités ou des ensembles infinis. Pour éviter ce type de controverses, le programme de Hilbert visait à construire les mathéma-

Le nombre Ω de Gregory Chaitin

Le nombre Ω de Chaitin est défini comme la probabilité qu'une machine de Turing, exécutant un programme tiré au hasard, s'arrête en un temps fini. Un programme aléatoire s'exprime comme une suite binaire de 0 et de 1 où chaque bit est tiré au hasard. Le programme doit être autodélimité, c'est-à-dire contenir un signal de fin de programme, telle une séquence de bits, par exemple 1111. Il est possible d'estimer Ω en répétant plusieurs fois le tirage aléatoire de program-

mes. Mais Ω n'est accessible que théoriquement, car il faudrait pouvoir tirer indéfiniment des programmes. De surcroît, il n'est pas possible de savoir si un programme aléatoire ne s'arrête jamais (c'est un problème indécidable). En pratique, on décide d'un temps d'exécution au-delà duquel on considère que le programme ne s'arrête pas.

Le nombre Ω est une probabilité ; il est donc compris entre 0 et 1, et peut être écrit en une suite binaire infinie de la

forme $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Il est aussi non calculable par un algorithme et ses chiffres, sauf un nombre fini d'entre eux, sont indécidables dans le sens suivant. Un système formel raisonnable peut déterminer des chiffres de Ω , c'est-à-dire démontrer certains énoncés du type « $a_i = 1$ » ou « $a_i = 0$ », mais un système raisonnable ne peut démontrer qu'un nombre fini d'énoncés de ce genre. Pour la plupart des chiffres a_i de Ω , le système ne peut prouver ni un énoncé ni son contraire.

L'AUTEUR



Hervé ZWIRN est professeur associé à l'UFR de physique de l'Université Paris-Diderot et président du Collège de physique et de philosophie.

BIBLIOGRAPHIE

J.-P. Delahaye, *La logique, un aiguillon pour la pensée*, Belin-Pour la Science, 2012.

Les grands problèmes mathématiques, *Dossier Pour la Science*, n° 74 janvier-mars 2012.

H. Zwirn, *Les systèmes complexes*, Odile Jacob, 2006.

Les chemins de la logique, *Dossier Pour la Science* n° 49, octobre-décembre 2005.

G. Guerreiro, Gödel, *Les Génies de la Science*, n° 20, août-novembre 2004.

H. Zwirn, *Les limites de la connaissance*, Odile Jacob, 2000.

SUR LE WEB

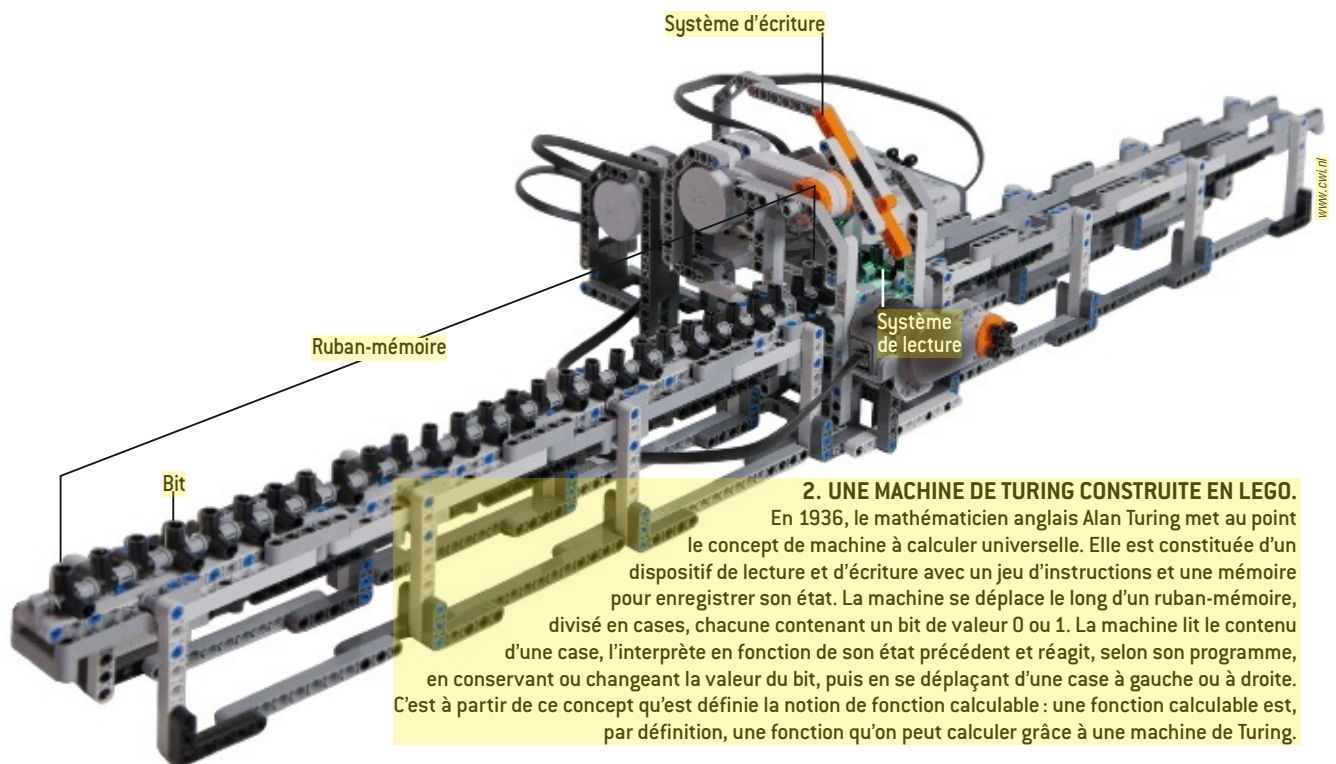
Site décrivant la construction d'une machine de Turing : www.legoturingmachine.org/

tiques sur une théorie de la preuve dite « finitiste » en ce sens qu'elle évitait le recours à tout infini considéré dans sa globalité. Hilbert espérait montrer que dans un tel édifice, toute vérité mathématique aurait été démontrable et cela d'une façon convaincante pour tous les mathématiciens. Cependant, en publiant ses théorèmes d'incomplétude en 1931, Gödel montra que cet espoir était vain.

Le premier théorème montre que dans tout système formel – un ensemble d'objets associé à un nombre fini d'axiomes et de règles de manipulation de symboles – contenant l'arithmétique, il existe des propositions vraies qu'on ne peut ni prouver ni réfuter. On les nomme des indécidables. Le second théorème énonce que la non-contradiction du système – c'est-à-dire que celui-ci ne conduit pas à la fois à une affirmation et à son contraire – est elle-même une proposition indécidable.

Cela signifie qu'il faut renoncer à l'espoir de prouver toute proposition vraie d'un système formel. Tout système formel contiendra des propositions qui, bien que vraies, ne pourront jamais être démontrées. De plus, cela montre qu'il est impossible de démontrer qu'un système formel n'est pas contradictoire en s'appuyant sur des démonstrations ne sortant pas du cadre de ce système. On ne peut donc jamais être sûr que le système formel utilisé n'est pas contradictoire, sauf à tenter de le prouver en s'appuyant sur un système formel plus large ; mais dans ce cas, c'est la non-contradiction du système élargi qui est, à son tour, mise en question.

Ces théorèmes établissent une limite constructive : il est impossible de construire



2. UNE MACHINE DE TURING CONSTRUITE EN LEGO.

En 1936, le mathématicien anglais Alan Turing met au point le concept de machine à calculer universelle. Elle est constituée d'un dispositif de lecture et d'écriture avec un jeu d'instructions et une mémoire pour enregistrer son état. La machine se déplace le long d'un ruban-mémoire, divisé en cases, chacune contenant un bit de valeur 0 ou 1. La machine lit le contenu d'une case, l'interprète en fonction de son état précédent et réagit, selon son programme, en conservant ou changeant la valeur du bit, puis en se déplaçant d'une case à gauche ou à droite. C'est à partir de ce concept qu'est définie la notion de fonction calculable : une fonction calculable est, par définition, une fonction qu'on peut calculer grâce à une machine de Turing.

un système mathématique formel non contradictoire permettant d'exprimer la totalité des mathématiques, et tel que tout énoncé vrai exprimable dans le système (en particulier sa propre non-contradiction) soit démontrable dans le système.

Une autre difficulté, liée aux raisons invoquées par Hilbert pour motiver son programme, provient de l'ambiguïté du terme « exister » pour un objet mathématique. Pour Hilbert, un objet mathématique existe s'il est non contradictoire. Pour les mathématiciens dits intuitionnistes, un objet mathématique n'existe que s'il est possible d'en donner un procédé effectif de construction. Par exemple, un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide possède un plus petit élément. L'axiome du choix permet de montrer l'existence d'un bon ordre sur l'ensemble des nombres réels. Pour Hilbert, ce bon ordre existe. Ce résultat est naturel pour les nombres entiers, mais il est impossible d'explicitier un procédé effectif de construction dans le cas d'un intervalle ouvert de nombres réels. Pour les intuitionnistes, ce bon ordre n'existe donc pas.

De plus, même si l'on refuse les restrictions trop fortes des intuitionnistes, il est souvent difficile de se prononcer sur l'existence de certains objets. Dans la théorie des ensembles, on utilise des nombres dits cardinaux pour quantifier le nombre d'éléments d'un ensemble. Si l'ensemble en question est infini, le nombre cardinal est transfini – notion introduite par le mathé-

maticien allemand Georg Cantor. L'existence de certains de ces nombres, les « grands cardinaux », n'est pas universellement acceptée, même lorsqu'elle ne conduit à aucune contradiction. Pour certains mathématiciens, l'argument de non-contradiction n'est pas suffisant pour justifier leur existence.

Des énoncés indécidables

Il n'existe et n'existera sans doute jamais de raison contraignante déterminant de façon définitive quels sont les objets mathématiques qui existent et ceux qui n'existent pas. Cette limite ontologique sur l'existence d'un objet mathématique provient du fait que le formalisme mathématique lui-même ne peut imposer cette existence. Pour les intuitionnistes, seules existent les entités qui peuvent être construites. Pour les autres mathématiciens, l'inclusion d'un objet résulte d'un choix personnel fondé sur des considérations de naturalité, de fécondité ou d'efficacité. Il faut donc renoncer à trancher de façon définitive la question de l'existence des objets mathématiques.

Même en considérant un formalisme rigoureusement défini, il est impossible de déterminer de façon non ambiguë les propriétés de certains objets. Ainsi, l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, sur laquelle les mathématiciens fondent généralement la théorie des ensembles, est suffisante pour

une grande partie des mathématiques actuelles. En revanche, elle ne nous dit rien sur la vérité de l'axiome du choix. Cet énoncé est indécidable : il ne peut être ni prouvé ni réfuté dans l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel. Il en est de même pour l'existence des grands cardinaux. L'axiomatique de Zermelo-Fraenkel est compatible avec l'affirmation et avec la négation de ces énoncés. L'intuition n'est pas d'un grand secours pour décider de leur vérité. Il en résulte qu'il devient difficile d'accepter le point de vue selon lequel il existe de « vrais ensembles » pour lesquels ces propriétés sont soit vraies, soit fausses.

La découverte récente de nouvelles propositions indécidables, en particulier dans le domaine de l'informatique théorique, a fait reculer encore plus loin la prétention de pouvoir trouver la réponse à toute interrogation mathématique. Le mathématicien argentin-américain Gregory Chaitin s'est intéressé aux équations diophantiennes, équations polynomiales à coefficients entiers et dont les inconnues sont des nombres entiers également. Il a construit une telle équation contenant 17 000 variables et un paramètre unique noté n . En fonction de la valeur de n , l'équation a un nombre fini ou infini de solutions. Pour une valeur de n donnée, les solutions sont-elles en nombre fini ? G. Chaitin a prouvé qu'aucun système formel ne pouvait déterminer la finitude ou non du nombre de solutions de cette équation pour plus qu'un nombre fini