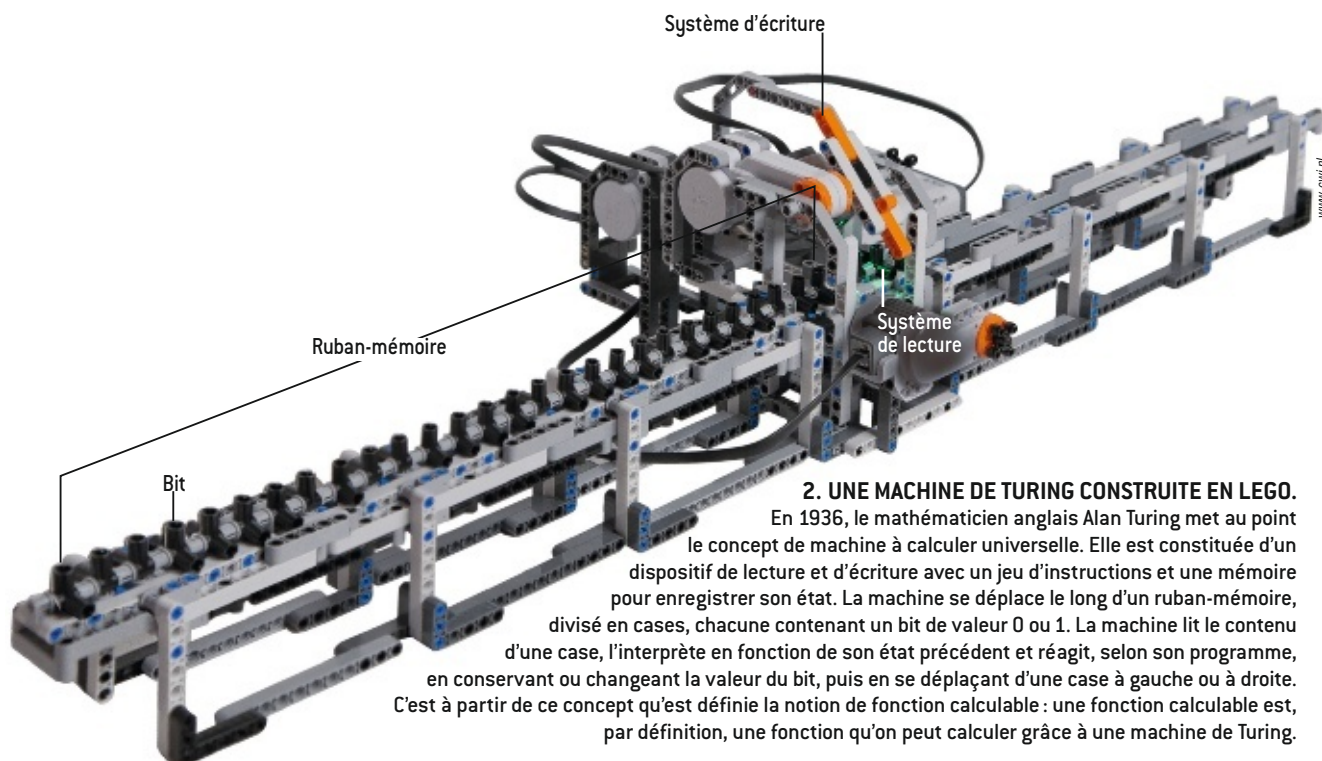




2. UNE MACHINE DE TURING CONSTRUITE EN LEGO.

En 1936, le mathématicien anglais Alan Turing met au point le concept de machine à calculer universelle. Elle est constituée d'un dispositif de lecture et d'écriture avec un jeu d'instructions et une mémoire pour enregistrer son état. La machine se déplace le long d'un ruban-mémoire, divisé en cases, chacune contenant un bit de valeur 0 ou 1. La machine lit le contenu d'une case, l'interprète en fonction de son état précédent et réagit, selon son programme, en conservant ou changeant la valeur du bit, puis en se déplaçant d'une case à gauche ou à droite. C'est à partir de ce concept qu'est définie la notion de fonction calculable : une fonction calculable est, par définition, une fonction qu'on peut calculer grâce à une machine de Turing.

un système mathématique formel non contradictoire permettant d'exprimer la totalité des mathématiques, et tel que tout énoncé vrai exprimable dans le système (en particulier sa propre non-contradiction) soit démontrable dans le système.

Une autre difficulté, liée aux raisons invoquées par Hilbert pour motiver son programme, provient de l'ambiguïté du terme « exister » pour un objet mathématique. Pour Hilbert, un objet mathématique existe s'il est non contradictoire. Pour les mathématiciens dits intuitionnistes, un objet mathématique n'existe que s'il est possible d'en donner un procédé effectif de construction. Par exemple, un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide possède un plus petit élément. L'axiome du choix permet de montrer l'existence d'un bon ordre sur l'ensemble des nombres réels. Pour Hilbert, ce bon ordre existe. Ce résultat est naturel pour les nombres entiers, mais il est impossible d'explicitier un procédé effectif de construction dans le cas d'un intervalle ouvert de nombres réels. Pour les intuitionnistes, ce bon ordre n'existe donc pas.

De plus, même si l'on refuse les restrictions trop fortes des intuitionnistes, il est souvent difficile de se prononcer sur l'existence de certains objets. Dans la théorie des ensembles, on utilise des nombres dits cardinaux pour quantifier le nombre d'éléments d'un ensemble. Si l'ensemble en question est infini, le nombre cardinal est transfini – notion introduite par le mathé-

maticien allemand Georg Cantor. L'existence de certains de ces nombres, les « grands cardinaux », n'est pas universellement acceptée, même lorsqu'elle ne conduit à aucune contradiction. Pour certains mathématiciens, l'argument de non-contradiction n'est pas suffisant pour justifier leur existence.

Des énoncés indécidables

Il n'existe et n'existera sans doute jamais de raison contraignante déterminant de façon définitive quels sont les objets mathématiques qui existent et ceux qui n'existent pas. Cette limite ontologique sur l'existence d'un objet mathématique provient du fait que le formalisme mathématique lui-même ne peut imposer cette existence. Pour les intuitionnistes, seules existent les entités qui peuvent être construites. Pour les autres mathématiciens, l'inclusion d'un objet résulte d'un choix personnel fondé sur des considérations de naturalité, de fécondité ou d'efficacité. Il faut donc renoncer à trancher de façon définitive la question de l'existence des objets mathématiques.

Même en considérant un formalisme rigoureusement défini, il est impossible de déterminer de façon non ambiguë les propriétés de certains objets. Ainsi, l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, sur laquelle les mathématiciens fondent généralement la théorie des ensembles, est suffisante pour

une grande partie des mathématiques actuelles. En revanche, elle ne nous dit rien sur la vérité de l'axiome du choix. Cet énoncé est indécidable : il ne peut être ni prouvé ni réfuté dans l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel. Il en est de même pour l'existence des grands cardinaux. L'axiomatique de Zermelo-Fraenkel est compatible avec l'affirmation et avec la négation de ces énoncés. L'intuition n'est pas d'un grand secours pour décider de leur vérité. Il en résulte qu'il devient difficile d'accepter le point de vue selon lequel il existe de « vrais ensembles » pour lesquels ces propriétés sont soit vraies, soit fausses.

La découverte récente de nouvelles propositions indécidables, en particulier dans le domaine de l'informatique théorique, a fait reculer encore plus loin la prétention de pouvoir trouver la réponse à toute interrogation mathématique. Le mathématicien argentin-américain Gregory Chaitin s'est intéressé aux équations diophantiennes, équations polynomiales à coefficients entiers et dont les inconnues sont des nombres entiers également. Il a construit une telle équation contenant 17 000 variables et un paramètre unique noté n . En fonction de la valeur de n , l'équation a un nombre fini ou infini de solutions. Pour une valeur de n donnée, les solutions sont-elles en nombre fini ? G. Chaitin a prouvé qu'aucun système formel ne pouvait déterminer la finitude ou non du nombre de solutions de cette équation pour plus qu'un nombre fini