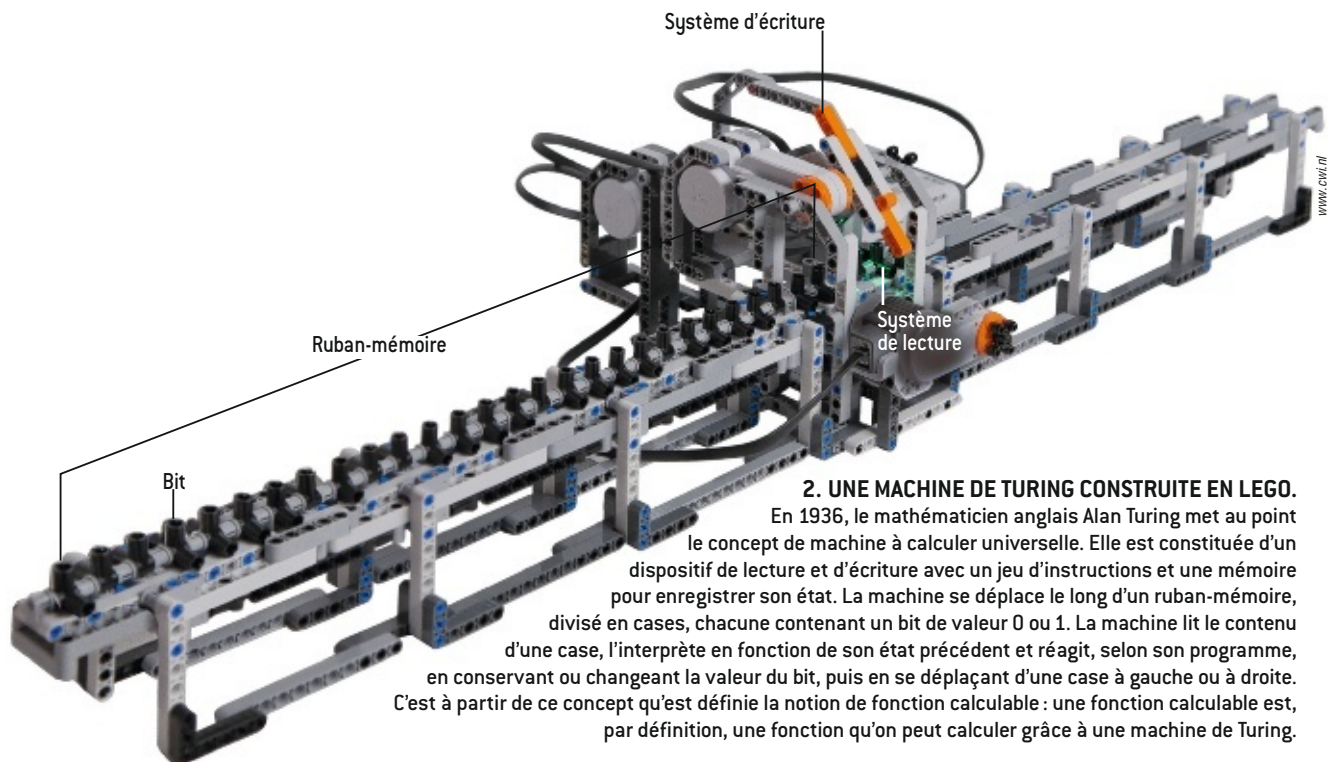




2. UNE MACHINE DE TURING CONSTRUITE EN LEGO.

En 1936, le mathématicien anglais Alan Turing met au point le concept de machine à calculer universelle. Elle est constituée d'un dispositif de lecture et d'écriture avec un jeu d'instructions et une mémoire pour enregistrer son état. La machine se déplace le long d'un ruban-mémoire, divisé en cases, chacune contenant un bit de valeur 0 ou 1. La machine lit le contenu d'une case, l'interprète en fonction de son état précédent et réagit, selon son programme, en conservant ou changeant la valeur du bit, puis en se déplaçant d'une case à gauche ou à droite. C'est à partir de ce concept qu'est définie la notion de fonction calculable : une fonction calculable est, par définition, une fonction qu'on peut calculer grâce à une machine de Turing.

un système mathématique formel non contradictoire permettant d'exprimer la totalité des mathématiques, et tel que tout énoncé vrai exprimable dans le système (en particulier sa propre non-contradiction) soit démontrable dans le système.

Une autre difficulté, liée aux raisons invoquées par Hilbert pour motiver son programme, provient de l'ambiguïté du terme « exister » pour un objet mathématique. Pour Hilbert, un objet mathématique existe s'il est non contradictoire. Pour les mathématiciens dits intuitionnistes, un objet mathématique n'existe que s'il est possible d'en donner un procédé effectif de construction. Par exemple, un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide possède un plus petit élément. L'axiome du choix permet de montrer l'existence d'un bon ordre sur l'ensemble des nombres réels. Pour Hilbert, ce bon ordre existe. Ce résultat est naturel pour les nombres entiers, mais il est impossible d'explicitier un procédé effectif de construction dans le cas d'un intervalle ouvert de nombres réels. Pour les intuitionnistes, ce bon ordre n'existe donc pas.

De plus, même si l'on refuse les restrictions trop fortes des intuitionnistes, il est souvent difficile de se prononcer sur l'existence de certains objets. Dans la théorie des ensembles, on utilise des nombres dits cardinaux pour quantifier le nombre d'éléments d'un ensemble. Si l'ensemble en question est infini, le nombre cardinal est transfini – notion introduite par le mathé-

maticien allemand Georg Cantor. L'existence de certains de ces nombres, les « grands cardinaux », n'est pas universellement acceptée, même lorsqu'elle ne conduit à aucune contradiction. Pour certains mathématiciens, l'argument de non-contradiction n'est pas suffisant pour justifier leur existence.

Des énoncés indécidables

Il n'existe et n'existera sans doute jamais de raison contraignante déterminant de façon définitive quels sont les objets mathématiques qui existent et ceux qui n'existent pas. Cette limite ontologique sur l'existence d'un objet mathématique provient du fait que le formalisme mathématique lui-même ne peut imposer cette existence. Pour les intuitionnistes, seules existent les entités qui peuvent être construites. Pour les autres mathématiciens, l'inclusion d'un objet résulte d'un choix personnel fondé sur des considérations de naturalité, de fécondité ou d'efficacité. Il faut donc renoncer à trancher de façon définitive la question de l'existence des objets mathématiques.

Même en considérant un formalisme rigoureusement défini, il est impossible de déterminer de façon non ambiguë les propriétés de certains objets. Ainsi, l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, sur laquelle les mathématiciens fondent généralement la théorie des ensembles, est suffisante pour

une grande partie des mathématiques actuelles. En revanche, elle ne nous dit rien sur la vérité de l'axiome du choix. Cet énoncé est indécidable : il ne peut être ni prouvé ni réfuté dans l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel. Il en est de même pour l'existence des grands cardinaux. L'axiomatique de Zermelo-Fraenkel est compatible avec l'affirmation et avec la négation de ces énoncés. L'intuition n'est pas d'un grand secours pour décider de leur vérité. Il en résulte qu'il devient difficile d'accepter le point de vue selon lequel il existe de « vrais ensembles » pour lesquels ces propriétés sont soit vraies, soit fausses.

La découverte récente de nouvelles propositions indécidables, en particulier dans le domaine de l'informatique théorique, a fait reculer encore plus loin la prétention de pouvoir trouver la réponse à toute interrogation mathématique. Le mathématicien argentin-américain Gregory Chaitin s'est intéressé aux équations diophantiennes, équations polynomiales à coefficients entiers et dont les inconnues sont des nombres entiers également. Il a construit une telle équation contenant 17 000 variables et un paramètre unique noté n . En fonction de la valeur de n , l'équation a un nombre fini ou infini de solutions. Pour une valeur de n donnée, les solutions sont-elles en nombre fini ? G. Chaitin a prouvé qu'aucun système formel ne pouvait déterminer la finitude ou non du nombre de solutions de cette équation pour plus qu'un nombre fini

de valeurs de n . Cela signifie que, quel que soit le système formel dans lequel on se place, il est impossible de répondre de façon générale à la question « cette équation a-t-elle un nombre fini ou infini de solutions pour telle valeur de n ? ».

Ce problème est lié aux travaux de G. Chaitin sur les machines de Turing universelles, sortes d'ordinateurs théoriques capables de mener tout type de calcul (voir la figure 2). G. Chaitin a défini le nombre Ω (oméga) comme la probabilité que la machine s'arrête au bout d'un temps fini quand on lui donne à exécuter un programme aléatoire écrit en code binaire, c'est-à-dire dont chaque bit (0 ou 1) est tiré au hasard (voir l'encadré page 47). Le nombre Ω est bien défini, mais n'est pas calculable. Un système formel est capable de calculer au plus un nombre fini de bits de cette probabilité, écrite dans le système

binaire. Le problème de l'équation diophantienne de paramètre n revient aussi à calculer un nombre du type de Ω pour savoir si le nombre de solutions entières est fini. Chaque bit correspond à une valeur de n et indique si les solutions sont en nombre fini (par exemple, le bit en question est égal à zéro si les solutions sont en nombre fini, et égal à un sinon).

Une infinité d'énoncés indémontrables

Les nombres de type Ω n'étant pas calculables, il en résulte la limite cognitive suivante: quel que soit le système formel utilisé, il existe une infinité d'énoncés vrais qu'il est impossible de démontrer – si on énonce pour chaque bit la valeur qu'il peut prendre, nécessairement certains énoncés sont vrais. De plus, les énoncés de ce type, dont

la résolution est irrémédiablement hors de portée, sont infiniment plus nombreux que ceux qu'il est possible de traiter.

Quant aux limites identifiées en physique, elles sont souvent de nature prédictive. Il n'est, en général, pas possible de fournir mieux qu'une probabilité sur une future mesure, en raison de la nature chaotique ou quantique des phénomènes. L'étude des systèmes dynamiques non linéaires en mécanique classique, dont le comportement est régi par des équations différentielles non linéaires, a mis au jour des propriétés surprenantes. Leur comportement est déterministe: la donnée de leur état initial suffit, en principe, pour calculer leur état à tout instant. De tels systèmes devraient donc être parfaitement prévisibles. On a cependant mis en évidence la propriété de « sensibilité aux conditions initiales », selon laquelle

L'irréductibilité computationnelle

Une autre limite prédictive provient de la propriété d'irréductibilité computationnelle. Elle concerne les systèmes tels qu'il n'existe aucun autre moyen de savoir l'état dans lequel ils seront à un instant ultérieur que de les simuler, c'est-à-dire de reproduire leur comportement, pas à pas, sur un ordinateur et de laisser ce comportement se dérouler jusqu'à l'instant en question. Cela signifie qu'il n'existe aucun raccourci pour connaître cet état, par exemple une formule permettant de calculer directement l'état correspondant à un instant donné. Le seul moyen est de laisser se dérouler toutes les étapes qui précèdent.

Cette propriété a été mise en avant d'abord dans le contexte des automates cellulaires. Ces automa-

tes fonctionnent par itération. Partant d'une configuration initiale d'une grille dont les cellules sont dans divers états, des règles simples indiquent comment la configuration suivante est obtenue. Ainsi, la situation des cellules au temps $n + 1$ dépend de la configuration au temps n .

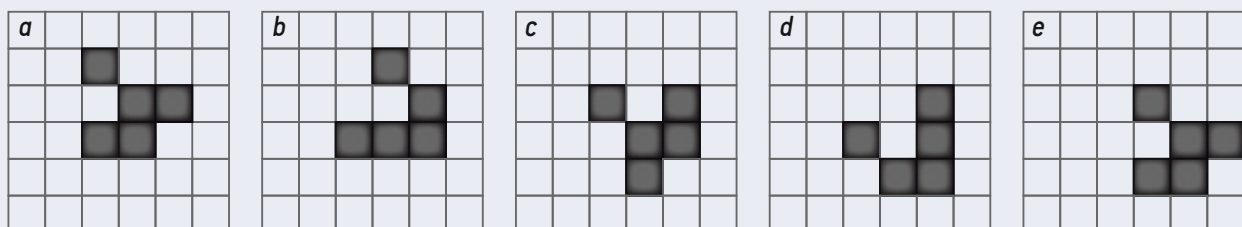
L'exemple le plus connu est le *Jeu de la vie* du mathématicien britannique John Conway. Pour certaines situations initiales, les configurations suivantes sont aisément prédictibles. C'est le cas, par exemple, lorsqu'un comportement périodique apparaît ou bien lorsqu'un mouvement régulier des cellules caractérise le passage de la configuration n à la configuration $n + 1$. Mais certaines situations de départ défient toute tentative pour prévoir leur évolution et le seul moyen pour savoir ce qu'el-

les deviennent, après par exemple une centaine de pas, est de passer par les 99 étapes intermédiaires.

On peut même montrer que connaître le destin ultime d'une configuration initiale est un problème indécidable: il n'existe aucun algorithme général capable de prévoir, quand on lui propose une configuration en entrée, si elle va finir par s'éteindre ou si elle va conserver des cellules indéfiniment.

Devoir, lors du calcul, passer par le même chemin que suit le système réel sans avoir la possibilité de couper court pour connaître directement l'état qui nous intéresse est une forme d'imprévisibilité un peu particulière. Il ne s'agit pas ici d'une impossibilité de connaître cet état, puisqu'en simulant le système on y parvient. Il s'agit de l'impossibilité

d'aller « plus vite que le système » pour savoir où il va. D'une certaine façon, cela signifie que le seul moyen de le savoir est d'observer le système lui-même ou son clone simulé sur un ordinateur. Cela peut devenir une véritable impossibilité si on cherche à savoir ce que devient le système à long terme, car la simulation peut prendre un temps qui excède nos capacités pratiques. L'irréductibilité computationnelle apporte un point de vue utile pour tenter de comprendre certains phénomènes qualifiés d'émergents. Il faut préciser que, bien que l'on soupçonne que de nombreux systèmes soient computationnellement irréductibles, prouver rigoureusement qu'un système donné possède bien cette propriété reste aujourd'hui un problème mathématique ouvert.



Dans le *Jeu de la vie* de J. Conway, des règles simples définissent l'évolution des cases d'une étape à la suivante. Une cellule morte (blanche) devient vivante (noire) si elle est entourée de trois cellules vivantes et une cellule reste vivante si elle est entourée de deux ou trois cellules

vivantes. Dans la séquence ci-dessus, l'évolution est périodique et le premier motif (a) se retrouve dans le dernier (e) translaté d'une ligne et d'une colonne. À l'exception de cas particuliers, il est difficile de prévoir l'évolution d'une configuration sans en calculer chaque étape.