

de valeurs de n . Cela signifie que, quel que soit le système formel dans lequel on se place, il est impossible de répondre de façon générale à la question « cette équation a-t-elle un nombre fini ou infini de solutions pour telle valeur de n ? ».

Ce problème est lié aux travaux de G. Chaitin sur les machines de Turing universelles, sortes d'ordinateurs théoriques capables de mener tout type de calcul (voir la figure 2). G. Chaitin a défini le nombre Ω (oméga) comme la probabilité que la machine s'arrête au bout d'un temps fini quand on lui donne à exécuter un programme aléatoire écrit en code binaire, c'est-à-dire dont chaque bit (0 ou 1) est tiré au hasard (voir l'encadré page 47). Le nombre Ω est bien défini, mais n'est pas calculable. Un système formel est capable de calculer au plus un nombre fini de bits de cette probabilité, écrite dans le système

binaire. Le problème de l'équation diophantienne de paramètre n revient aussi à calculer un nombre du type de Ω pour savoir si le nombre de solutions entières est fini. Chaque bit correspond à une valeur de n et indique si les solutions sont en nombre fini (par exemple, le bit en question est égal à zéro si les solutions sont en nombre fini, et égal à un sinon).

Une infinité d'énoncés indémontrables

Les nombres de type Ω n'étant pas calculables, il en résulte la limite cognitive suivante: quel que soit le système formel utilisé, il existe une infinité d'énoncés vrais qu'il est impossible de démontrer – si on énonce pour chaque bit la valeur qu'il peut prendre, nécessairement certains énoncés sont vrais. De plus, les énoncés de ce type, dont

la résolution est irrémédiablement hors de portée, sont infiniment plus nombreux que ceux qu'il est possible de traiter.

Quant aux limites identifiées en physique, elles sont souvent de nature prédictive. Il n'est, en général, pas possible de fournir mieux qu'une probabilité sur une future mesure, en raison de la nature chaotique ou quantique des phénomènes. L'étude des systèmes dynamiques non linéaires en mécanique classique, dont le comportement est régi par des équations différentielles non linéaires, a mis au jour des propriétés surprenantes. Leur comportement est déterministe: la donnée de leur état initial suffit, en principe, pour calculer leur état à tout instant. De tels systèmes devraient donc être parfaitement prévisibles. On a cependant mis en évidence la propriété de « sensibilité aux conditions initiales », selon laquelle

L'irréductibilité computationnelle

Une autre limite prédictive provient de la propriété d'irréductibilité computationnelle. Elle concerne les systèmes tels qu'il n'existe aucun autre moyen de savoir l'état dans lequel ils seront à un instant ultérieur que de les simuler, c'est-à-dire de reproduire leur comportement, pas à pas, sur un ordinateur et de laisser ce comportement se dérouler jusqu'à l'instant en question. Cela signifie qu'il n'existe aucun raccourci pour connaître cet état, par exemple une formule permettant de calculer directement l'état correspondant à un instant donné. Le seul moyen est de laisser se dérouler toutes les étapes qui précèdent.

Cette propriété a été mise en avant d'abord dans le contexte des automates cellulaires. Ces automa-

tes fonctionnent par itération. Partant d'une configuration initiale d'une grille dont les cellules sont dans divers états, des règles simples indiquent comment la configuration suivante est obtenue. Ainsi, la situation des cellules au temps $n + 1$ dépend de la configuration au temps n .

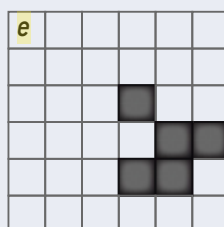
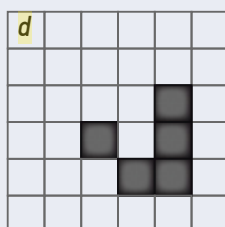
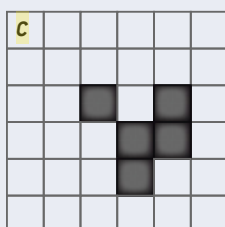
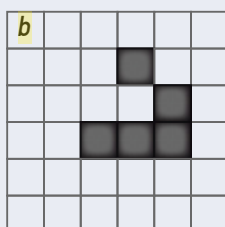
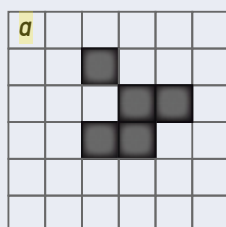
L'exemple le plus connu est le *Jeu de la vie* du mathématicien britannique John Conway. Pour certaines situations initiales, les configurations suivantes sont aisément prédictibles. C'est le cas, par exemple, lorsqu'un comportement périodique apparaît ou bien lorsqu'un mouvement régulier des cellules caractérise le passage de la configuration n à la configuration $n + 1$. Mais certaines situations de départ défient toute tentative pour prévoir leur évolution et le seul moyen pour savoir ce qu'el-

les deviennent, après par exemple une centaine de pas, est de passer par les 99 étapes intermédiaires.

On peut même montrer que connaître le destin ultime d'une configuration initiale est un problème indécidable: il n'existe aucun algorithme général capable de prévoir, quand on lui propose une configuration en entrée, si elle va finir par s'éteindre ou si elle va conserver des cellules indéfiniment.

Devoir, lors du calcul, passer par le même chemin que suit le système réel sans avoir la possibilité de couper court pour connaître directement l'état qui nous intéresse est une forme d'imprévisibilité un peu particulière. Il ne s'agit pas ici d'une impossibilité de connaître cet état, puisqu'en simulant le système on y parvient. Il s'agit de l'impossibilité

d'aller « plus vite que le système » pour savoir où il va. D'une certaine façon, cela signifie que le seul moyen de le savoir est d'observer le système lui-même ou son clone simulé sur un ordinateur. Cela peut devenir une véritable impossibilité si on cherche à savoir ce que devient le système à long terme, car la simulation peut prendre un temps qui excède nos capacités pratiques. L'irréductibilité computationnelle apporte un point de vue utile pour tenter de comprendre certains phénomènes qualifiés d'émergents. Il faut préciser que, bien que l'on soupçonne que de nombreux systèmes soient computationnellement irréductibles, prouver rigoureusement qu'un système donné possède bien cette propriété reste aujourd'hui un problème mathématique ouvert.



Dans le *Jeu de la vie* de J. Conway, des règles simples définissent l'évolution des cases d'une étape à la suivante. Une cellule morte (blanche) devient vivante (noire) si elle est entourée de trois cellules vivantes et une cellule reste vivante si elle est entourée de deux ou trois cellules

vivantes. Dans la séquence ci-dessus, l'évolution est périodique et le premier motif (a) se retrouve dans le dernier (e) translaté d'une ligne et d'une colonne. À l'exception de cas particuliers, il est difficile de prévoir l'évolution d'une configuration sans en calculer chaque étape.

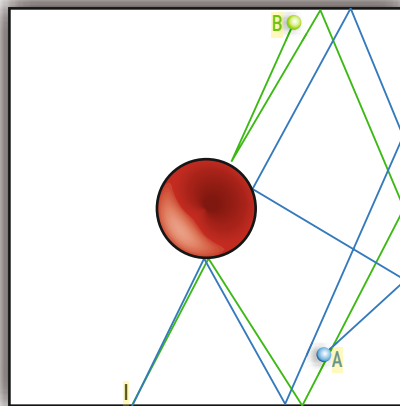
une toute petite différence entre deux états initiaux s'amplifie de façon exponentielle avec le temps (voir la figure 3).

Ce constat, annoncé par le Français Henri Poincaré dès la fin du XIX^e siècle, a été popularisé par le fameux « effet papillon » d'Edward Lorenz. En 1963, ce météorologiste américain a montré, sur un système de trois équations différentielles non linéaires simples, que deux états initialement aussi proches que l'on veut (la différence étant indiscernable au degré de précision adopté), peuvent évoluer de telle façon que, au bout d'un certain temps, ils n'aient plus rien en commun. Conséquence : il est impossible de faire des prévisions au-delà d'un certain horizon temporel, malgré le fait que les lois régissant l'évolution du système soient déterministes. On parle dans ce cas de chaos déterministe, le système donnant l'impression d'évoluer de façon aléatoire, en dépit du fait qu'il soit déterministe. Ce chaos traduit notamment notre incapacité à spécifier un état initial de façon infiniment précise.

Un horizon de prévision pour les systèmes chaotiques

L'horizon temporel des prévisions dépend du système chaotique considéré. Il est possible de décrire jusqu'à quelques secondes le mouvement d'une boussole placée dans deux champs magnétiques, l'un fixe et l'autre tournant. La détermination des trajectoires des planètes du Système solaire s'étend sur plusieurs centaines de millions d'années. Mais au-delà de ces horizons, la plus infime variation initiale peut conduire à des états très différents.

Cette sensibilité aux conditions initiales, à laquelle sont sujets la plupart des systèmes dynamiques, impose une limite de principe sur nos capacités prédictives. En améliorant la précision sur les conditions initiales, il est possible de repousser cet horizon, mais sans pouvoir le faire disparaître. Pour de tels systèmes, on renonce à décrire en détail leur dynamique. On s'intéresse plutôt aux propriétés asymptotiques du système, c'est-à-dire à son évolution qualitative à long terme, et aux caractéristiques communes qu'il partage avec d'autres systèmes de même type. On parle dans ce cas de propriétés générales et l'on doit se contenter de décrire



3. LE BILLARD DIT DE SINAI fournit un exemple simple de chaos déterministe. Au centre d'un billard carré est placé un obstacle circulaire sur lequel rebondissent les boules de billard A et B. Celles-ci partent du même point initial I dans des directions quasi identiques. Au bout d'un certain temps, les deux trajectoires sont très différentes. Il est possible en théorie de prévoir la position des boules à tout instant, mais, en pratique, la grande sensibilité aux conditions initiales l'interdit. L'inévitable incertitude sur la condition initiale s'amplifie très vite avec le temps et brouille la connaissance qu'on peut avoir de la trajectoire.

ce qui se passe en moyenne sur un grand nombre de ces systèmes. Les prévisions deviennent alors probabilistes.

La physique quantique, elle, fait apparaître un type d'indéterminisme plus radical, où les probabilités proviennent de l'essence même des phénomènes et non plus de notre ignorance ou de notre incapacité à spécifier suffisamment un état. Par exemple, même lorsque l'état d'un électron est connu aussi parfaitement qu'il est théoriquement possible de le connaître, il est impossible de prévoir le résultat de la mesure de certaines de ses propriétés autrement que de façon probabiliste. La position, l'impulsion ou le spin de cet électron pourront prendre différentes valeurs qui ne se détermineront qu'avec la mesure, et cela de façon intrinsèquement probabiliste. Il s'agit encore une fois d'une limite prédictive, car il est impossible de prévoir à coup sûr le résultat de ce type de mesure.

Mais la physique quantique est encore plus radicale dans sa remise en cause de nos conceptions intuitives habituelles consistant à penser qu'il existe une réalité indépendante de tout observateur et ressemblant à ce que nous en percevons. L'impossibilité d'exprimer la théorie quantique sous une forme objective forte (c'est-à-dire ne faisant mention à aucune mesure ni à aucun observateur) est un argument important contre cette position. La mécanique quantique ne décrit pas la réalité en soi, mais seulement la réalité empirique des phénomènes. La plupart des tentatives visant à décrire une éventuelle réalité telle qu'elle est, grâce à des formalismes alternatifs, ont échoué. On est ainsi contraint de se contenter d'une description de l'apparence de la réalité à travers les phénomènes empiriques et de renoncer à décrire la réalité en soi. Dans cette limite ontologique, seule la réalité empirique phénoménale est accessible.

Toutes les limites évoquées ici résultent de démonstrations provenant de la science elle-même. Leur découverte est un phénomène fascinant, car elle s'est faite simultanément avec une progression inédite des connaissances apportées par la science. En nous permettant de connaître de mieux en mieux les territoires qu'elle explore, la science a fait apparaître de vastes contrées inaccessibles dont nous ne soupçonnions pas l'existence. Cette découverte, souvent ignorée, est sans doute l'une des plus remarquables de la science contemporaine sur le plan épistémologique. ■