

LOGIQUE & CALCUL

Le problème de la fabrique de briques

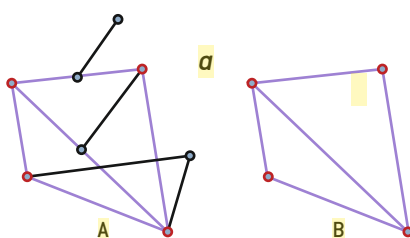
En poussant des chariots de briques, en dessinant des réseaux urbains ou des circuits électroniques, on est confronté au difficile problème du nombre de croisements dans un graphe.

Jean-Paul DELAHAYE

Dessinez cinq points sur une feuille, puis essayez de les joindre deux à deux par des courbes en évitant que deux courbes ne se croisent : vous n'y arrivez pas. Et si vous tentiez plutôt de joindre trois points A, B, C à trois autres D, E, F sans croisement ? Vous n'y arrivez pas non plus ! Et l'on peut démontrer ces impossibilités (voir l'encadré 2)...

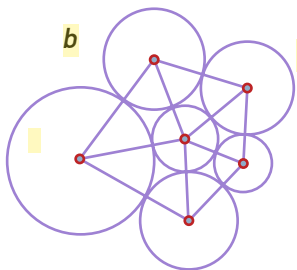
Le premier problème revient à établir que K_5 (le graphe à cinq nœuds où chacun est relié à tous les autres) n'est pas un graphe planaire, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le dessiner sur le plan sans croisement. Le second consiste à démontrer que $K_{3,3}$ (le graphe obtenu en reliant trois points à trois autres de manière systématique) n'est pas un graphe planaire. C'est un vieux problème de divertissement mathématique popularisé par l'Américain Sam Loyd en 1903, mais dont l'origine est sans doute plus ancienne. On le présente en général sous la forme suivante : trois maisons s'abonnent chacune au gaz, à l'électricité et à l'eau ; les canalisations reliant les maisons et les fournisseurs peuvent-elles ne pas se croiser ?

Derrière leur aspect innocent, ces énigmes cachent des problèmes difficiles, des conjectures que personne ne sait prouver et des questions algorithmiques ayant un réel intérêt pratique pour le dessin des circuits électroniques ou la représentation optimale de réseaux en informatique.



Il est tout à fait remarquable que les deux graphes non planaires envisagés plus haut (K_5 et $K_{3,3}$) soient caractéristiques de la « non-planarité ». Un théorème démontré par le Polonais Casimir Kuratowski en 1929 affirme en effet qu'un graphe est planaire si et seulement si l'on ne peut en extraire aucun graphe de type K_5 ou $K_{3,3}$ (un graphe B est extrait d'un graphe A si, en enlevant des arcs et des nœuds à A, on trouve le dessin de B, voir la figure a).

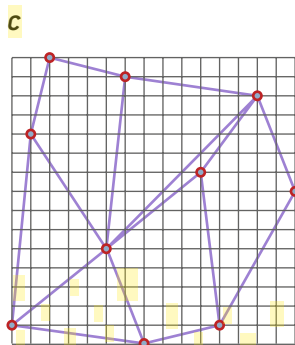
Dit autrement : si un graphe n'est pas planaire, on y trouve l'un des deux graphes K_5 ou $K_{3,3}$ (ou les deux), et si c'est impossible alors il est planaire.



Des cercles tangents

Un théorème très surprenant sur les graphes planaires a été démontré par l'Allemand Paul Koebe en 1936. Il indique qu'un graphe est planaire si et seulement si c'est « un graphe de pièces de monnaie », c'est-à-dire si et seulement si l'on peut trouver des pièces de monnaie de diamètres variés qui, serrées les unes contre les autres, dessinent le graphe en question, les centres des pièces étant les nœuds du graphe et un arc joignant chaque couple de pièces en contact (voir la figure b).

On déduit du théorème de Koebe un autre théorème inattendu démontré indépendamment quelques années plus tôt par le mathématicien d'origine hongroise István Fáry : un graphe est planaire si et seulement si on peut le dessiner sur un plan en reliant



les nœuds par des segments de droite qui ne se croisent pas. Aussi compliqué que soit un graphe planaire, on peut toujours le dessiner sur un plan sans recourir à des arcs courbes.

On connaît des algorithmes rapides (dont le temps de calcul est proportionnel au nombre d'arcs) qui déterminent automatiquement le dessin des graphes planaires avec des segments de droite. De plus, certains d'entre eux n'utilisent, pour poser les nœuds, que les points d'une grille carrée de côté m , où m est le nombre d'arcs du graphe planaire [voir la figure c]. Ces algorithmes sont utiles pour le dessin des circuits électroniques où l'on évite que les fils d'un circuit se croisent.

Faire au mieux

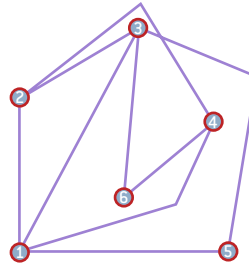
Pour les graphes non planaires, se pose une intéressante question : comment le disposer sur le plan de façon à avoir le moins de croisements possibles ? La meilleure disposition d'un graphe G sur le plan possède un nombre minimum de croisements noté $cr[G]$. Le nombre minimum de croisements

de K_5 est 1, de même que celui de $K_{3,3}$ (ils ne sont pas planaires et on sait les disposer de façon à ce qu'il n'y ait qu'un seul croisement). Qu'en est-il pour K_6 , K_7 , et plus généralement pour K_n (le graphe complet à n nœuds) et $K_{n,m}$ (le graphe reliant n points à m autres points des nm façons possibles) ? Nous verrons que ces énigmes sont d'une incroyable difficulté.

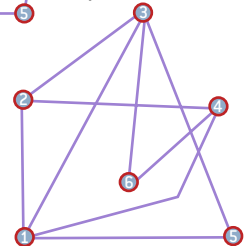
Un même graphe peut être dessiné plus ou moins adroitement et présenter un nombre de croisements plus ou moins grand. La figure d ci-contre montre le même graphe dessiné avec un, cinq ou six croisements. Si vous regardez attentivement ce graphe, vous n'y trouverez ni K_5 ni $K_{3,3}$; c'est donc qu'il est planaire et qu'on peut le dessiner sans aucune intersection. Cherchez ce dessin sans croisement [voir la figure g en fin d'article].

Pour être certain qu'il n'y ait pas de malentendu, nous décrirons les règles de constitution des graphes et du décompte des croisements. Les graphes que nous considérons sont non orientés : l'arc AB, est le même que l'arc BA. Par définition,

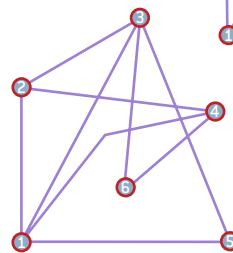
d Un croisement



Cinq croisements



Six croisements



1. Turán et le début du problème des intersections

Dans une lettre à son collègue Richard Guy, le mathématicien hongrois Paul Turán (1910-1976) explique comment le problème du nombre de croisements lui est venu à l'esprit, et à quel point il fut concrètement important pour lui à un certain moment de son existence.

« En 1944, notre groupe de travail [...] travaillait dans une fabrique de briques près de Budapest. Notre tâche consistait à transporter des briques à l'aide de petits wagons qui roulaient sur des rails, pour les déplacer des fours où elles étaient cuites vers des entrepôts disposant de places pour les recevoir. Comme il était impossible de savoir à l'avance quels entrepôts seraient libres, chaque four était relié à chaque entrepôt. Nous devions déplacer un nombre fixé de wagons chaque jour, aussi avions-nous intérêt à être aussi efficaces que possible. Après avoir chargé les



wagons dans la chaleur des fours, nous les déplaçons doucement et sans trop d'effort.

Le seul problème provenait des croisements, car ils provoquaient des déraillements qui faisaient tomber les briques, ce qui nous donnait du travail supplémentaire et nous faisait



perdre du temps. Ayant eu à pâtir de cela, je me demandais vraiment pourquoi le réseau de rails avait été dessiné de manière aussi peu économique en nombre de croisements. Diminuer leur nombre aurait grandement amélioré la productivité de la fabrique. »

La question du nombre minimum de croisements d'un graphe devint un sujet de recherche mathématique sérieux. Une bibliographie recensant 566 articles liés à ce sujet a été publiée en 2007. Depuis, quelques dizaines d'articles sont venus s'ajouter à l'énorme liste.