

les nœuds par des segments de droite qui ne se croisent pas. Aussi compliqué que soit un graphe planaire, on peut toujours le dessiner sur un plan sans recourir à des arcs courbes.

On connaît des algorithmes rapides (dont le temps de calcul est proportionnel au nombre d'arcs) qui déterminent automatiquement le dessin des graphes planaires avec des segments de droite. De plus, certains d'entre eux n'utilisent, pour poser les nœuds, que les points d'une grille carrée de côté m , où m est le nombre d'arcs du graphe planaire [voir la figure c]. Ces algorithmes sont utiles pour le dessin des circuits électroniques où l'on évite que les fils d'un circuit se croisent.

Faire au mieux

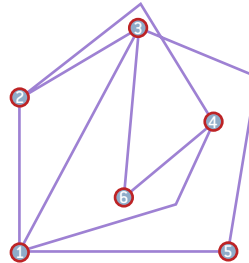
Pour les graphes non planaires, se pose une intéressante question : comment le disposer sur le plan de façon à avoir le moins de croisements possibles ? La meilleure disposition d'un graphe G sur le plan possède un nombre minimum de croisements noté $cr[G]$. Le nombre minimum de croisements

de K_5 est 1, de même que celui de $K_{3,3}$ (ils ne sont pas planaires et on sait les disposer de façon à ce qu'il n'y ait qu'un seul croisement). Qu'en est-il pour K_6 , K_7 , et plus généralement pour K_n (le graphe complet à n nœuds) et $K_{n,m}$ (le graphe reliant n points à m autres points des nm façons possibles) ? Nous verrons que ces énigmes sont d'une incroyable difficulté.

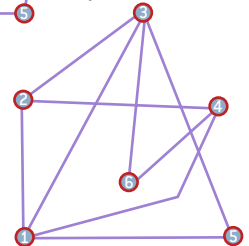
Un même graphe peut être dessiné plus ou moins adroitement et présenter un nombre de croisements plus ou moins grand. La figure d ci-contre montre le même graphe dessiné avec un, cinq ou six croisements. Si vous regardez attentivement ce graphe, vous n'y trouverez ni K_5 ni $K_{3,3}$; c'est donc qu'il est planaire et qu'on peut le dessiner sans aucune intersection. Cherchez ce dessin sans croisement [voir la figure g en fin d'article].

Pour être certain qu'il n'y ait pas de malentendu, nous décrirons les règles de constitution des graphes et du décompte des croisements. Les graphes que nous considérons sont non orientés : l'arc AB, est le même que l'arc BA. Par définition,

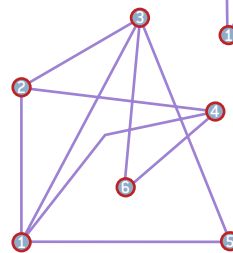
d Un croisement



Cinq croisements



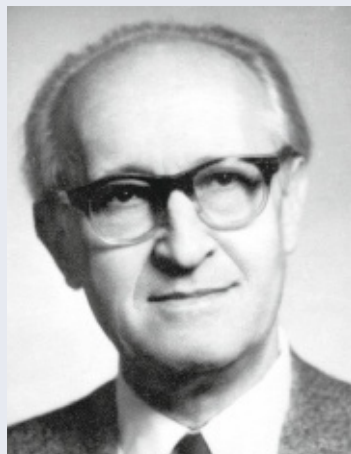
Six croisements



1. Turán et le début du problème des intersections

Dans une lettre à son collègue Richard Guy, le mathématicien hongrois Paul Turán (1910-1976) explique comment le problème du nombre de croisements lui est venu à l'esprit, et à quel point il fut concrètement important pour lui à un certain moment de son existence.

« En 1944, notre groupe de travail [...] travaillait dans une fabrique de briques près de Budapest. Notre tâche consistait à transporter des briques à l'aide de petits wagons qui roulaient sur des rails, pour les déplacer des fours où elles étaient cuites vers des entrepôts disposant de places pour les recevoir. Comme il était impossible de savoir à l'avance quels entrepôts seraient libres, chaque four était relié à chaque entrepôt. Nous devions déplacer un nombre fixé de wagons chaque jour, aussi avions-nous intérêt à être aussi efficaces que possible. Après avoir chargé les



wagons dans la chaleur des fours, nous les déplaçons doucement et sans trop d'effort.

Le seul problème provenait des croisements, car ils provoquaient des déraillements qui faisaient tomber les briques, ce qui nous donnait du travail supplémentaire et nous faisait



perdre du temps. Ayant eu à pâtir de cela, je me demandais vraiment pourquoi le réseau de rails avait été dessiné de manière aussi peu économique en nombre de croisements. Diminuer leur nombre aurait grandement amélioré la productivité de la fabrique. »

La question du nombre minimum de croisements d'un graphe devint un sujet de recherche mathématique sérieux. Une bibliographie recensant 566 articles liés à ce sujet a été publiée en 2007. Depuis, quelques dizaines d'articles sont venus s'ajouter à l'énorme liste.

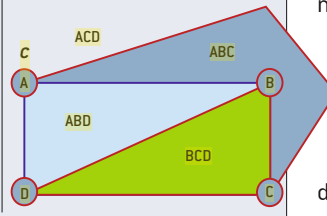
2. Aucun des graphes K_5 et $K_{3,3}$ n'est planaire

Démontrons que le graphe K_5 n'est pas planaire. Commençons par placer quatre nœuds A, B, C et D sur le plan. Traçons des arcs de A à B, de B à C, de C à D et de D à A, sans croisement. C'est bien sûr possible, mais cela impose de créer deux zones distinctes du plan, l'une intérieure en bleu clair sur la figure a ci-contre, l'autre extérieure (en gris).

En joignant maintenant B à D, nous divisons l'une des zones en deux, et nous obtenons donc trois zones (figure b). Tout en traçant ces cinq premiers arcs découpe de la même façon le plan en trois zones (faites des essais pour constater que toutes les méthodes conduisent à la même situation). En joignant maintenant A à C, nous divisons encore inévitablement l'une des zones en deux, et nous obtenons un graphe comme celui de la figure c comportant quatre zones correspondant respec-

tivement aux quatre triplets possibles BCD, ACD, ABD et ABC. Quelle que soit la façon dont on aura placé les points A, B, C et D et les arcs les reliant deux à deux, la situation sera identique : nous aurons le point A à l'extérieur de la zone BCD, le point B à l'extérieur de la zone ACD, le point C à l'extérieur de la zone ABD et le point D à l'extérieur de la zone ABC. Si vous en doutez, reprenez le dessin et vous serez vite persuadé que tous les dessins possibles conduisent à cette situation inévitable.

Pour représenter K_5 comme un graphe planaire, il faut placer un cinquième point E et le relier sans croisement à A, B, C et D. C'est impossible, car si E est dans la zone BCD, il ne pourra être relié à A sans croisement. S'il est en ACD, il ne pourra être relié à B sans croisement. S'il est en ABD, il ne pourra être relié à C sans croisement. S'il est en ABC, il ne pourra être relié à D sans croisement. Il n'existe aucune façon de dessiner le graphe K_5 sans croisement ! Un raisonnement similaire est facile à concevoir pour $K_{3,3}$. On commencera par placer trois maisons et deux services, cela détermine trois zones dont aucune ne convient pour le troisième service.

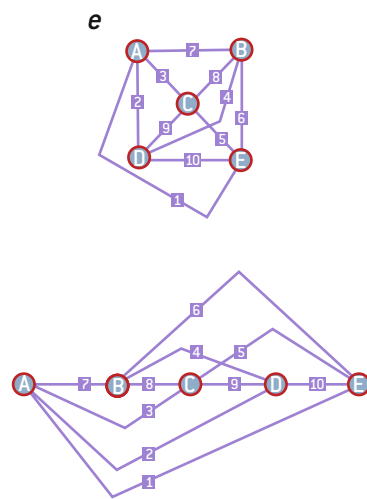


dans un graphe, deux nœuds sont reliés une fois au plus. Un graphe est donc déterminé par l'ensemble de ses nœuds (par exemple {A, B, C, D}) et de ses arcs (par exemple {AB, AD, BC, BD}).

Quand on dessine un graphe sur un plan et que l'on compte les croisements, on le fait de telle façon que :

- au plus deux arcs du graphe se croisent en un même point (lorsque ce n'est pas le cas, on s'y ramène en déplaçant légèrement le dessin d'un arc) ;
- on interdit à un arc reliant A et B de se croiser lui-même ;
- enfin, on interdit à un arc reliant A et B de passer par des nœuds du graphe autres que ses extrémités A et B.

Il résulte de tout cela que l'emplacement des nœuds du graphe G sur le plan est sans importance pratique pour la valeur de $cr(G)$. En effet, s'il existe un dessin des arcs de G



LE NOMBRE MINIMAL DE CROISEMENTS dans un graphe ne dépend pas de l'emplacement des nœuds : on peut ainsi passer continûment du dessin du haut à celui du bas.

avec r croisements pour une certaine disposition des nœuds sur le plan, en déplaçant continûment les nœuds et les arcs (qu'on allonge et déforme si nécessaire), il y aura un dessin des arcs avec r croisements pour toute autre disposition des nœuds.

Un exemple est donné sur la figure e. En déplaçant les nœuds du graphe et en faisant suivre les arcs (sans créer ni supprimer de croisement), on passe continûment d'un dessin à l'autre en conservant le nombre de croisements. Le dessin de départ comporte un croisement (entre les arcs BD et CE), il en comportera un (entre les arcs BD et CE) à l'arrivée. Le nombre minimal de croisements d'un graphe ne dépend donc pas de l'emplacement des nœuds.

D'après le théorème de Fáry, tout graphe planaire se dessine sans croisement en représentant les arcs par des segments de droite. Il est donc naturel de se demander, pour les graphes non planaires, si le nombre minimum de croisements est le même quand on impose que les arcs soient des segments de droite, et quand on ne l'impose pas. La réponse est non, en général. De ce fait, on nomme « nombre minimum de croisements rectilignes » du graphe G, et on note $cr'(G)$, le nombre minimum de croisements obtenus en dessinant des segments de droite pour les arcs. On a bien sûr $cr(G) \leq cr'(G)$. Le graphe le plus simple pour lequel $cr(G)$ et $cr'(G)$ sont différents est le graphe K_8 ; il se dessine avec 18 croisements si l'on n'impose pas aux arcs d'être des segments de droite ($cr(K_8) = 18$, voir l'encadré 3) et il oblige à 19 croisements au minimum quand on veut que tous les arcs soient des segments de droite ($cr'(K_8) = 19$).

Euler vient à l'aide

Parmi les énoncés généraux concernant $cr(G)$, l'un conduit à une inégalité utile à partir de la « formule d'Euler » pour les graphes planaires. Cette formule indique que si un graphe est planaire et d'un seul tenant ou « connexe » (en suivant les arcs, on peut joindre deux nœuds quelconques), alors le nombre n de nœuds du graphe, le nombre a d'arcs et le nombre f de faces (les zones que