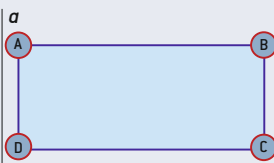


2. Aucun des graphes K_5 et $K_{3,3}$ n'est planaire

Démontrons que le graphe K_5 n'est pas planaire. Commençons par placer quatre nœuds A, B, C et D sur le plan. Traçons des arcs de A à B, de B à C, de C à D et de D à A, sans croisement. C'est bien sûr possible, mais cela impose de créer deux zones distinctes du plan, l'une intérieure en bleu clair sur la figure a ci-contre, l'autre extérieure (en gris).

En joignant maintenant B à D, nous divisons l'une des zones en deux, et nous obtenons trois zones (figure b). Tout en traçant ces cinq premiers arcs découpe de la même façon le plan en trois zones (faites des essais pour constater que toutes les méthodes conduisent à la même situation). En joignant maintenant A à C, nous divisons encore inévitablement l'une des zones en deux, et nous obtenons un graphe comme celui de la figure c comportant quatre zones correspondant respec-



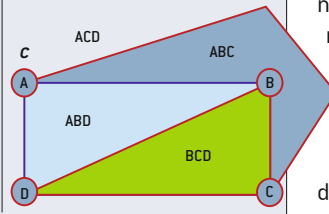
tivement aux quatre triplets possibles BCD, ACD, ABD et ABC. Quelle que soit la façon dont on aura placé les points A, B, C et D et les arcs les reliant deux à deux, la situation sera identique : nous aurons le point A



à l'extérieur de la zone BCD, le point B à l'extérieur de la zone ACD, le point C à l'extérieur de la zone ABD et le point D à l'extérieur de la zone ABC. Si vous en doutez, reprenez le dessin et vous serez vite persuadé que tous les dessins possibles conduisent à cette situation inévitable.

Pour représenter K_5 comme un graphe planaire, il faut placer un cinquième point E et le relier sans croisement à A, B, C et D. C'est impossible, car si E est dans la zone BCD, il ne pourra être relié à A sans croisement. S'il est en ACD, il ne pourra être relié à B sans croisement. S'il est en ABD, il ne pourra être relié à C sans croisement. S'il est en ABC, il ne pourra être relié à D sans croisement. Il n'existe aucune façon de dessiner le graphe K_5 sans croisement !

Un raisonnement similaire est facile à concevoir pour $K_{3,3}$. On commencera par placer trois maisons et deux services, cela détermine trois zones dont aucune ne convient pour le troisième service.

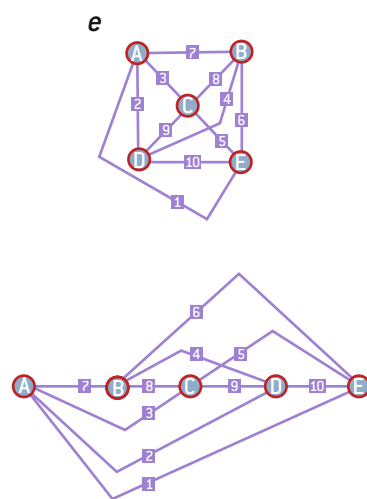


dans un graphe, deux nœuds sont reliés une fois au plus. Un graphe est donc déterminé par l'ensemble de ses nœuds (par exemple {A, B, C, D}) et de ses arcs (par exemple {AB, AD, BC, BD}).

Quand on dessine un graphe sur un plan et que l'on compte les croisements, on le fait de telle façon que :

- au plus deux arcs du graphe se croisent en un même point (lorsque ce n'est pas le cas, on s'y ramène en déplaçant légèrement le dessin d'un arc) ;
- on interdit à un arc reliant A et B de se croiser lui-même ;
- enfin, on interdit à un arc reliant A et B de passer par des nœuds du graphe autres que ses extrémités A et B.

Il résulte de tout cela que l'emplacement des nœuds du graphe G sur le plan est sans importance pratique pour la valeur de $cr(G)$. En effet, s'il existe un dessin des arcs de G



LE NOMBRE MINIMAL DE CROISEMENTS dans un graphe ne dépend pas de l'emplacement des nœuds : on peut ainsi passer continûment du dessin du haut à celui du bas.

avec r croisements pour une certaine disposition des nœuds sur le plan, en déplaçant continûment les nœuds et les arcs (qu'on allonge et déforme si nécessaire), il y aura un dessin des arcs avec r croisements pour toute autre disposition des nœuds.

Un exemple est donné sur la figure e. En déplaçant les nœuds du graphe et en faisant suivre les arcs (sans créer ni supprimer de croisement), on passe continûment d'un dessin à l'autre en conservant le nombre de croisements. Le dessin de départ comporte un croisement (entre les arcs BD et CE), il en comportera un (entre les arcs BD et CE) à l'arrivée. Le nombre minimal de croisements d'un graphe ne dépend donc pas de l'emplacement des nœuds.

D'après le théorème de Fáry, tout graphe planaire se dessine sans croisement en représentant les arcs par des segments de droite. Il est donc naturel de se demander, pour les graphes non planaires, si le nombre minimum de croisements est le même quand on impose que les arcs soient des segments de droite, et quand on ne l'impose pas. La réponse est non, en général. De ce fait, on nomme « nombre minimum de croisements rectilignes » du graphe G, et on note $cr'(G)$, le nombre minimum de croisements obtenus en dessinant des segments de droite pour les arcs. On a bien sûr $cr(G) \leq cr'(G)$. Le graphe le plus simple pour lequel $cr(G)$ et $cr'(G)$ sont différents est le graphe K_8 ; il se dessine avec 18 croisements si l'on n'impose pas aux arcs d'être des segments de droite ($cr(K_8) = 18$, voir l'encadré 3) et il oblige à 19 croisements au minimum quand on veut que tous les arcs soient des segments de droite ($cr'(K_8) = 19$).

Euler vient à l'aide

Parmi les énoncés généraux concernant $cr(G)$, l'un conduit à une inégalité utile à partir de la « formule d'Euler » pour les graphes planaires. Cette formule indique que si un graphe est planaire et d'un seul tenant ou « connexe » (en suivant les arcs, on peut joindre deux nœuds quelconques), alors le nombre n de nœuds du graphe, le nombre a d'arcs et le nombre f de faces (les zones que

le graphe dessiné sur le plan, y compris la zone extérieure] vérifient : $f = 2 - n + a$. La formule se démontre en partant d'un graphe réduit à un seul nœud ($f = 1, n = 1, a = 0$) et en ajoutant étape par étape soit un nouveau nœud avec un arc le reliant à la partie déjà construite sans créer de nouvelles faces (n et a augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité), soit un nouvel arc reliant deux nœuds déjà présents et créant une nouvelle face (f et a augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité).

Dans les graphes que nous considérons, une face est entourée d'au moins trois arcs, car si une face n'était entourée que de deux arcs, il y aurait deux fois le même arc, ce qui n'est pas autorisé. Chaque arc est sur la frontière de deux faces exactement. Pour entourer les f faces, il faut donc $3f/2$ arcs au moins, d'où $3f/2 \leq a$. En combinant avec

la formule d'Euler, on a $2 - n + a \leq 2a/3$, ou encore $a \leq 3n - 6$; en particulier, un graphe planaire ne possède jamais un nombre d'arcs supérieur à trois fois le nombre de nœuds.

Considérons maintenant un graphe non planaire G ayant C croisements. En enlevant un à un des arcs qui en rencontrent d'autres, on supprime tous les croisements et on arrive donc, après avoir enlevé C arcs, à un graphe planaire vérifiant l'inégalité vue plus haut qui s'écrit maintenant $(a - C) \leq 3n - 6$. Cela donne, pour $n > 2$, l'inégalité $C \geq a - 3(n - 2)$.

Cette inégalité indique un nombre minimum de croisements pour un graphe ayant n nœuds et a arcs. Si par exemple un graphe comporte 55 arcs et 15 nœuds, on sait qu'il aura au moins $55 - 3 \times 13 = 16$ croisements. Cela ne signifie pas qu'on arrivera à dessiner le graphe avec 16 croisements, car l'inégalité ne prétend pas donner le

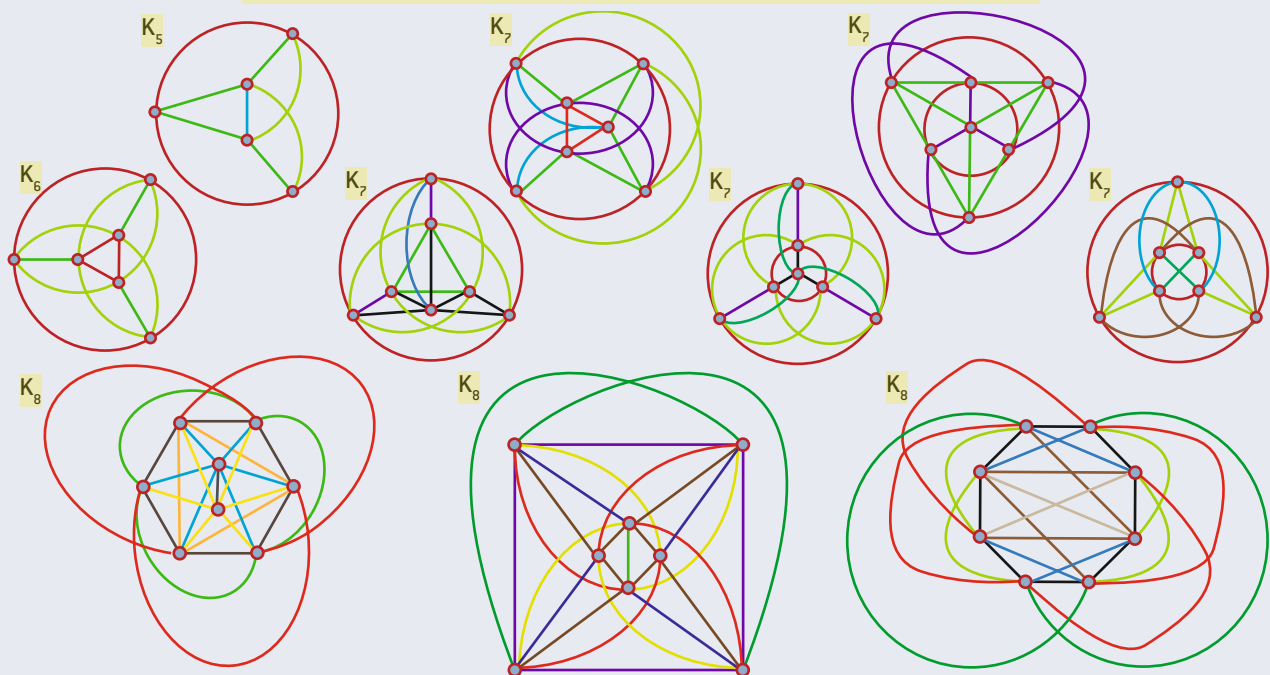
nombre exact de croisements du meilleur dessin, mais un minorant du minimum de croisements inévitables.

En menant d'autres raisonnements, cette inégalité a été améliorée de plusieurs façons, chacune ayant son intérêt selon le graphe considéré : $C \geq 7a/3 - 25(n - 2)/3$; $C \geq 3a - 35(n - 2)/3$; $C \geq 4a - 103(n - 2)/6$; $C \geq 5a - 25(n - 2)$ quand $n > 2$, et $C \geq a^3/(64n^2)$ quand $a \geq 4n$.

Preuves et conjectures

Ces inégalités sont certes utiles, mais, au moins dans le cas des graphes simples, on aimerait disposer d'égalités, c'est-à-dire de formules indiquant le nombre minimum de croisements $cr(G)$ qu'on peut obtenir et la façon d'y arriver. Le plus simple des graphes à n nœuds est le graphe complet

3. Les meilleurs dessins des graphes K_5 , K_6 , K_7 et K_8



La notation K_n désigne le graphe complet à n nœuds : chaque nœud est relié à tous les autres. Trouver la manière de dessiner ces graphes de façon à limiter le nombre de croisements des arcs reliant les nœuds est loin d'être facile et aucune méthode générale permettant de concevoir les dessins optimaux n'est connue. Les dessins ci-dessus sont les meilleurs possibles pour les graphes K_5 , K_6 , K_7 , K_8 .

Pour les deux dernières valeurs, plusieurs dispositions (topologiquement différentes) donnent le même nombre minimum de croisements. Ces solutions ont été trouvées par Richard Guy et redessinées par Francesco de Comitè, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille. Aujourd'hui la question du nombre minimum de croisements des graphes complets n'est résolue que pour $n \leq 12$.