

le graphe dessiné sur le plan, y compris la zone extérieure] vérifient : $f = 2 - n + a$. La formule se démontre en partant d'un graphe réduit à un seul nœud ($f = 1, n = 1, a = 0$) et en ajoutant étape par étape soit un nouveau nœud avec un arc le reliant à la partie déjà construite sans créer de nouvelles faces (n et a augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité), soit un nouvel arc reliant deux nœuds déjà présents et créant une nouvelle face (f et a augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité).

Dans les graphes que nous considérons, une face est entourée d'au moins trois arcs, car si une face n'était entourée que de deux arcs, il y aurait deux fois le même arc, ce qui n'est pas autorisé. Chaque arc est sur la frontière de deux faces exactement. Pour entourer les f faces, il faut donc $3f/2$ arcs au moins, d'où $3f/2 \leq a$. En combinant avec

la formule d'Euler, on a $2 - n + a \leq 2a/3$, ou encore $a \leq 3n - 6$; en particulier, un graphe planaire ne possède jamais un nombre d'arcs supérieur à trois fois le nombre de nœuds.

Considérons maintenant un graphe non planaire G ayant C croisements. En enlevant un à un des arcs qui en rencontrent d'autres, on supprime tous les croisements et on arrive donc, après avoir enlevé C arcs, à un graphe planaire vérifiant l'inégalité vue plus haut qui s'écrit maintenant $(a - C) \leq 3n - 6$. Cela donne, pour $n > 2$, l'inégalité $C \geq a - 3(n - 2)$.

Cette inégalité indique un nombre minimum de croisements pour un graphe ayant n nœuds et a arcs. Si par exemple un graphe comporte 55 arcs et 15 nœuds, on sait qu'il aura au moins $55 - 3 \times 13 = 16$ croisements. Cela ne signifie pas qu'on arrivera à dessiner le graphe avec 16 croisements, car l'inégalité ne prétend pas donner le

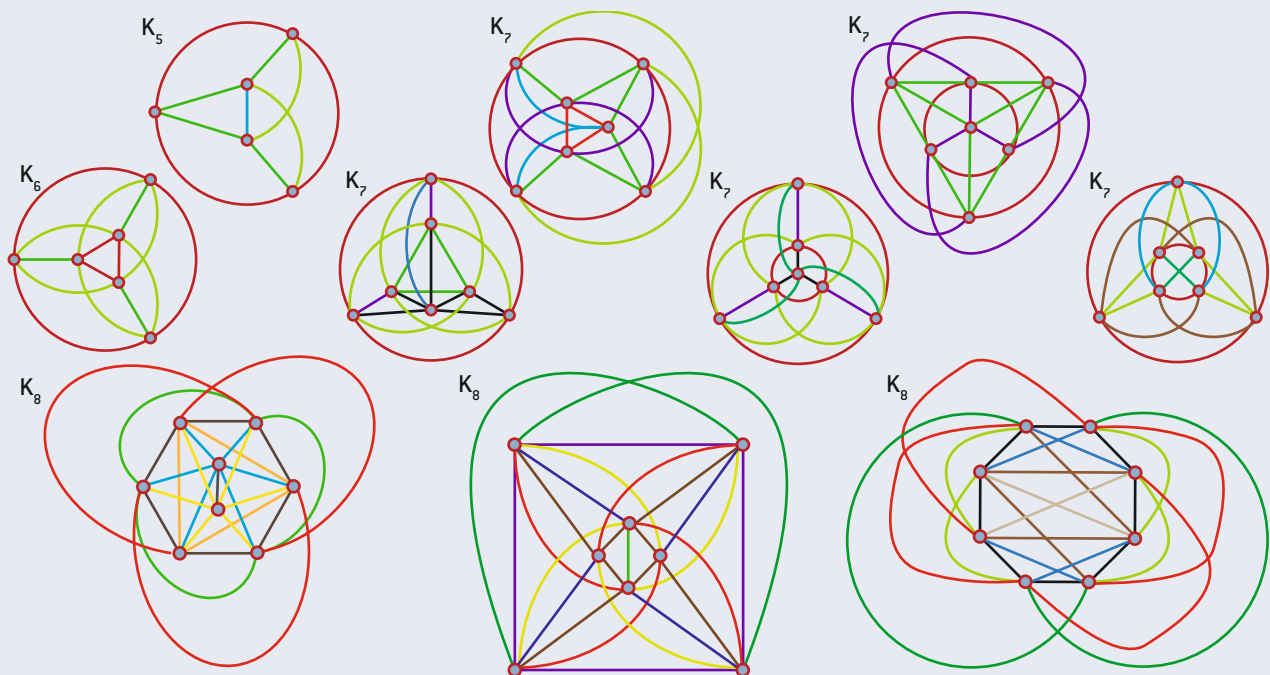
nombre exact de croisements du meilleur dessin, mais un minorant du minimum de croisements inévitables.

En menant d'autres raisonnements, cette inégalité a été améliorée de plusieurs façons, chacune ayant son intérêt selon le graphe considéré : $C \geq 7a/3 - 25(n - 2)/3$; $C \geq 3a - 35(n - 2)/3$; $C \geq 4a - 103(n - 2)/6$; $C \geq 5a - 25(n - 2)$ quand $n > 2$, et $C \geq a^3/(64n^2)$ quand $a \geq 4n$.

Preuves et conjectures

Ces inégalités sont certes utiles, mais, au moins dans le cas des graphes simples, on aimerait disposer d'égalités, c'est-à-dire de formules indiquant le nombre minimum de croisements $cr(G)$ qu'on peut obtenir et la façon d'y arriver. Le plus simple des graphes à n nœuds est le graphe complet

3. Les meilleurs dessins des graphes K_5 , K_6 , K_7 et K_8



La notation K_n désigne le graphe complet à n nœuds : chaque nœud est relié à tous les autres. Trouver la manière de dessiner ces graphes de façon à limiter le nombre de croisements des arcs reliant les nœuds est loin d'être facile et aucune méthode générale permettant de concevoir les dessins optimaux n'est connue. Les dessins ci-dessus sont les meilleurs possibles pour les graphes K_5 , K_6 , K_7 , K_8 .

Pour les deux dernières valeurs, plusieurs dispositions (topologiquement différentes) donnent le même nombre minimum de croisements. Ces solutions ont été trouvées par Richard Guy et redessinées par Francesco de Comitè, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille. Aujourd'hui la question du nombre minimum de croisements des graphes complets n'est résolue que pour $n \leq 12$.

où chaque nœud est lié à tous les autres. On le note K_n et il possède $n(n-1)/2$ arcs. Que sait-on de $cr(K_n)$?

Une formule proposée il y a bientôt 50 ans par Thomas Saaty et Richard Guy indique que $cr(K_n)$ est égal à $Z(n)$, soit $1/4 \lfloor n/2 \rfloor \lfloor (n-1)/2 \rfloor \lfloor (n-2)/2 \rfloor \lfloor (n-3)/2 \rfloor$, où les doubles crochets désignent la fonction partie entière (par exemple, $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$).

Cela donne les valeurs :

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$cr(K_n)$	0	1	3	9	18	36	60	100	150	225	315	441	588

Cette formule semble bien fonctionner... mais personne n'a su la démontrer ! Il s'agit donc d'une conjecture. On a seulement pu établir que $cr(K_n)$ est inférieur ou égal à $Z(n)$. L'égalité a été démontrée jusqu'à $n = 12$, mais cela a demandé un travail considérable. La difficulté provient de ce qu'il existe un très grand nombre de façons de dessiner le graphe K_n sur le plan et qu'il faut surtout ne pas en manquer pour identifier les dessins conduisant à un nombre minimal de croisements.

Les dessins optimaux (voir l'encadré 3) pour K_5 et K_6 ne sont pas trop difficiles à trouver. Pour K_7 et K_8 , cela devient plus subtil, car il n'y a pas unicité de la solution donnant le nombre minimum de croisements. L'idée de

L'ÉNIGME DU CROISEMENT
des arcs d'un graphe
montre que des thèmes que tout
le monde peut comprendre
concentrent parfois en eux
toutes les difficultés possibles.

trouver une disposition optimale de proche en proche en utilisant celle de K_{n-1} pour trouver celle de K_n est mauvaise, car, dans certains cas, les dessins optimaux pour une valeur de n ne contiennent aucun dessin optimal pour $n-1$. Aussi, aller au-delà de 12 est un défi informatique et mathématique.

À défaut d'une démonstration de l'inégalité $cr(K_n) \geq Z(n)$, les mathématiciens ont réussi récemment à démontrer que $cr(K_n) \geq 0,86Z(n)$, inégalité qui s'en approche.

Le nombre chromatique d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs différentes qu'il faut utiliser pour colorier les nœuds du graphe sans que deux nœuds voisins ne soient de la même couleur ; on le note $chr(G)$. On sait, d'après le fameux théorème des quatre couleurs démontré en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken, que pour tout graphe planaire, quatre couleurs suffisent ; autrement dit, si G est planaire, $chr(G) \leq 4$.

Une belle conjecture due à Michael Albertson relie $cr(K_n)$ et $chr(G)$: si G a pour nombre chromatique n , alors son nombre de croisements minimum $cr(G)$ est au moins celui de K_n : $[chr(G) = n] \Rightarrow [cr(G) \geq cr(K_n)]$.

En 2009, les Hongrois János Barát et Géza Tóth l'ont démontrée jusqu'à $n = 16$. Là encore, on voit que les connaissances dont nous disposons sont remarquablement... limitées.

Une autre conjecture du mathématicien hongrois György Hajós affirmait que si le graphe G exige au moins n couleurs ($chr(G) \geq n$), alors G contient le graphe K_n . On a pu l'établir pour $n = 1, 2, 3, 4$. Contrairement aux précédentes conjectures, on a réussi à traiter presque tous les cas... pour finalement montrer que la conjecture est fausse pour tout $n \geq 7$. Les cas $n = 5$ et $n = 6$ restent en suspens.

Graphe de trois maisons et trois services

Le graphe reliant trois maisons aux trois services (gaz, électricité, eau), qui est la base du problème de Sam Loyd, a une forme plus générale : n nœuds sont reliés à m autres

4. Les trois maisons et les trois services

L'alimentation de trois maisons en eau, gaz et électricité est un divertissement mathématique dont l'origine, mal connue, est sans doute antérieure au XX^e siècle.

Il n'a pas de solution sans croisement, car $K_{3,3}$ n'est pas



planaire. En revanche, quelques astuces permettent de concevoir des pseudo-solutions. Trouvez pourquoi la figure ci-dessus, tirée de http://www.archimedes-lab.org/How_to_Solve/Water_gas.html n'est pas une vraie solution.

Quand, à la place d'un plan, on considère un tore (qu'on obtient en recollant deux à deux les côtés opposés d'un carré), alors non seulement le problème de dessiner sans croisement $K_{3,3}$ possède une solution, mais c'est aussi le cas pour $K_{4,4}$.

