

où chaque nœud est lié à tous les autres. On le note K_n et il possède $n(n-1)/2$ arcs. Que sait-on de $cr(K_n)$?

Une formule proposée il y a bientôt 50 ans par Thomas Saaty et Richard Guy indique que $cr(K_n)$ est égal à $Z(n)$, soit $1/4 \lfloor n/2 \rfloor \lfloor (n-1)/2 \rfloor \lfloor (n-2)/2 \rfloor \lfloor (n-3)/2 \rfloor$, où les doubles crochets désignent la fonction partie entière (par exemple, $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$).

Cela donne les valeurs :

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$cr(K_n)$	0	1	3	9	18	36	60	100	150	225	315	441	588

Cette formule semble bien fonctionner... mais personne n'a su la démontrer ! Il s'agit donc d'une conjecture. On a seulement pu établir que $cr(K_n)$ est inférieur ou égal à $Z(n)$. L'égalité a été démontrée jusqu'à $n = 12$, mais cela a demandé un travail considérable. La difficulté provient de ce qu'il existe un très grand nombre de façons de dessiner le graphe K_n sur le plan et qu'il faut surtout ne pas en manquer pour identifier les dessins conduisant à un nombre minimal de croisements.

Les dessins optimaux (voir l'encadré 3) pour K_5 et K_6 ne sont pas trop difficiles à trouver. Pour K_7 et K_8 , cela devient plus subtil, car il n'y a pas unicité de la solution donnant le nombre minimum de croisements. L'idée de

L'ÉNIGME DU CROISEMENT
des arcs d'un graphe
montre que des thèmes que tout
le monde peut comprendre
concentrent parfois en eux
toutes les difficultés possibles.

trouver une disposition optimale de proche en proche en utilisant celle de K_{n-1} pour trouver celle de K_n est mauvaise, car, dans certains cas, les dessins optimaux pour une valeur de n ne contiennent aucun dessin optimal pour $n-1$. Aussi, aller au-delà de 12 est un défi informatique et mathématique.

À défaut d'une démonstration de l'inégalité $cr(K_n) \geq Z(n)$, les mathématiciens ont réussi récemment à démontrer que $cr(K_n) \geq 0,86Z(n)$, inégalité qui s'en approche.

Le nombre chromatique d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs différentes qu'il faut utiliser pour colorier les nœuds du graphe sans que deux nœuds voisins ne soient de la même couleur ; on le note $chr(G)$. On sait, d'après le fameux théorème des quatre couleurs démontré en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken, que pour tout graphe planaire, quatre couleurs suffisent ; autrement dit, si G est planaire, $chr(G) \leq 4$.

Une belle conjecture due à Michael Albertson relie $cr(K_n)$ et $chr(G)$: si G a pour nombre chromatique n , alors son nombre de croisements minimum $cr(G)$ est au moins celui de K_n : $[chr(G) = n] \Rightarrow [cr(G) \geq cr(K_n)]$.

En 2009, les Hongrois János Barát et Géza Tóth l'ont démontrée jusqu'à $n = 16$. Là encore, on voit que les connaissances dont nous disposons sont remarquablement... limitées.

Une autre conjecture du mathématicien hongrois György Hajós affirmait que si le graphe G exige au moins n couleurs ($chr(G) \geq n$), alors G contient le graphe K_n . On a pu l'établir pour $n = 1, 2, 3, 4$. Contrairement aux précédentes conjectures, on a réussi à traiter presque tous les cas... pour finalement montrer que la conjecture est fausse pour tout $n \geq 7$. Les cas $n = 5$ et $n = 6$ restent en suspens.

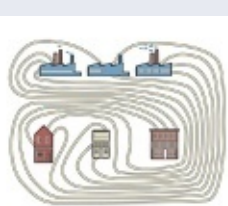
Graphe de trois maisons et trois services

Le graphe reliant trois maisons aux trois services (gaz, électricité, eau), qui est la base du problème de Sam Loyd, a une forme plus générale : n nœuds sont reliés à m autres

4. Les trois maisons et les trois services

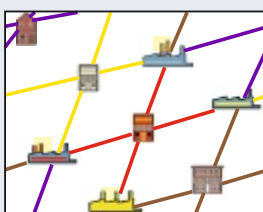
L'alimentation de trois maisons en eau, gaz et électricité est un divertissement mathématique dont l'origine, mal connue, est sans doute antérieure au XX^e siècle.

Il n'a pas de solution sans croisement, car $K_{3,3}$ n'est pas



planaire. En revanche, quelques astuces permettent de concevoir des pseudo-solutions. Trouvez pourquoi la figure ci-dessus, tirée de http://www.archimedes-lab.org/How_to_Solve/Water_gas.html n'est pas une vraie solution.

Quand, à la place d'un plan, on considère un tore (qu'on obtient en recollant deux à deux les côtés opposés d'un carré), alors non seulement le problème de dessiner sans croisement $K_{3,3}$ possède une solution, mais c'est aussi le cas pour $K_{4,4}$.



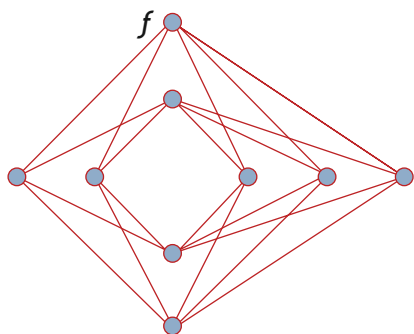
nœuds de toutes les façons possibles (il y en a nm). On note $K_{n,m}$ ce graphe et, bien sûr, on aimerait connaître le nombre minimum de croisements de $K_{n,m}$. C'est à ce graphe et au calcul de $cr(K_{n,m})$ que le mathématicien hongrois Paul Turán s'intéressa dans son camp de travail en 1944.

Voici quelques valeurs de $cr(K_{n,m})$, en fonction de n et de m , connues aujourd'hui :

$\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}$	3	4	5	6	7
3	3	2	4	6	9
4	2	4	8	12	18
5	4	8	16	24	36
6	6	12	24	36	54

En 1952, une solution générale au problème que Turán avait fait connaître autour de lui fut proposée par Kazimierz Urbanik et Kazimierz Zarankiewicz. Ils prétendaient prouver que $cr(K_{n,m})$ est égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. Treize ans après, on s'aperçut que le résultat était faux. Des preuves initiales, seule reste l'inégalité selon laquelle $cr(K_{n,m})$ est inférieur ou égal à l'expression ci-dessus. Si nul n'a réussi à prouver que l'égalité est vraie, aujourd'hui aucun contre-exemple n'en a été proposé, et on a donc... une conjecture de plus.

La démonstration de l'inégalité n'est pas très difficile, car elle consiste à disposer le graphe en plaçant sur une ligne horizontale les n premiers nœuds, et sur une ligne verticale les m autres nœuds, de façon à équilibrer le mieux possible les parties haute et basse et les parties droite et gauche. La figure f ci-dessous est un exemple pour $K_{4,5}$:



Pour illustrer à quel point ces problèmes sont difficiles et les conjectures incertaines, mentionnons encore le cas du graphe Q_n

de l'hypercube à n dimensions. En 1973, R. Guy et Paul Erdős proposèrent la formule : $cr(Q_n) = \{5 \times 4^n / 32 - 2^{n-2} \lfloor (n^2 + 1) / 2 \rfloor\}$.

Pendant plus de 40 ans, elle a semblé correcte. Pourtant, Yuansheng Yang, Guoqing Wang, Haoli Wang et Yan Zhou, de l'Université de Dalian en Chine, trouvèrent en 2012 un contre-exemple pour $n = 7$ et toutes les valeurs supérieures. La conjecture est donc archifausse !

Imposer aux arcs d'être des segments de droite, nous l'avons dit, conduit à un problème différent, celui du calcul de $cr'(G)$. Il se trouve qu'il est un peu plus facile, car le nombre de dessins différents à envisager est plus petit. Dans le cas du graphe K_n , les valeurs calculées et vérifiées vont jusqu'à $n = 27$ et on connaît en plus la valeur pour $n = 30$.

Peu d'espoir de pouvoir aller loin

En fait, les difficultés rencontrées sont peu étonnantes, car on sait depuis longtemps que le problème du calcul de $cr(G)$ est un problème de la classe NP-difficile. Cela signifie que si l'on savait le résoudre efficacement, alors on saurait aussi résoudre efficacement une grande famille de problèmes combinatoires difficiles, ce qui est plus qu'improbable. Cela n'empêche pas des progrès concrets en matière d'algorithmes.

On sait maintenant produire des dessins utiles en pratique pour des graphes de circuits comportant plusieurs centaines de nœuds. L'une des méthodes utilisées est la « planarisation » : on extrait du graphe un graphe planaire aussi grand que possible en ne retenant que certains arcs, et on ajoute ensuite avec précaution les arcs qui manquent en tentant de minimiser le nombre de croisements créés.

L'énigme du croisement des arcs d'un graphe montre que des thèmes de recherche que tout le monde peut comprendre concentrent parfois en eux toutes les difficultés possibles, et prouve une fois de plus que le monde mathématique, même là où on s'y attend le moins, comporte des obstacles surprenants... et peut-être insurmontables. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

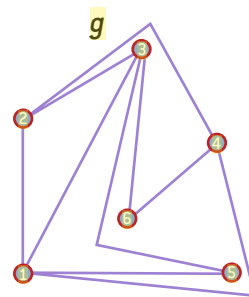
C. Buchheim et al., *Crossings and planarization, Handbook of Graph Drawing and Visualization* (éd. R. Tamassia), Chapman & Hall/CRC, 2013.

Y. Yang et al., *The Erdős and Guy conjectured equality on the crossing number of hypercubes*, 2012 : <http://arxiv.org/abs/1201.4700>

L. Beinke et R. Wilson, *The early history of the brick factory problem*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), pp. 41-47, 2010.

P. Erdős et R. Guy, *Crossing number problem*, *American Mathematical Monthly*, vol. 80, pp. 52-58, 1973.

K. Zarankiewicz, *On a problem of P. Turán concerning graphs*, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 41, pp. 137-145, 1954.



Solution de la question posée au début de l'article