

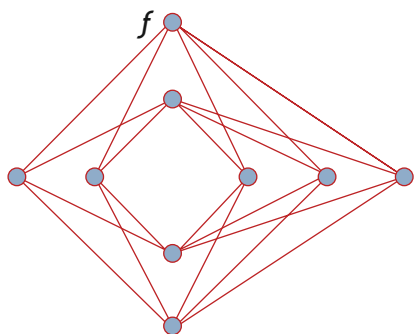
nœuds de toutes les façons possibles (il y en a nm). On note $K_{n,m}$ ce graphe et, bien sûr, on aimerait connaître le nombre minimum de croisements de $K_{n,m}$. C'est à ce graphe et au calcul de $cr(K_{n,m})$ que le mathématicien hongrois Paul Turán s'intéressa dans son camp de travail en 1944.

Voici quelques valeurs de $cr(K_{n,m})$, en fonction de n et de m , connues aujourd'hui :

$\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}$	3	4	5	6	7
3	3	2	4	6	9
4	2	4	8	12	18
5	4	8	16	24	36
6	6	12	24	36	54

En 1952, une solution générale au problème que Turán avait fait connaître autour de lui fut proposée par Kazimierz Urbanik et Kazimierz Zarankiewicz. Ils prétendaient prouver que $cr(K_{n,m})$ est égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. Treize ans après, on s'aperçut que le résultat était faux. Des preuves initiales, seule reste l'inégalité selon laquelle $cr(K_{n,m})$ est inférieur ou égal à l'expression ci-dessus. Si nul n'a réussi à prouver que l'égalité est vraie, aujourd'hui aucun contre-exemple n'en a été proposé, et on a donc... une conjecture de plus.

La démonstration de l'inégalité n'est pas très difficile, car elle consiste à disposer le graphe en plaçant sur une ligne horizontale les n premiers nœuds, et sur une ligne verticale les m autres nœuds, de façon à équilibrer le mieux possible les parties haute et basse et les parties droite et gauche. La figure f ci-dessous est un exemple pour $K_{4,5}$:



Pour illustrer à quel point ces problèmes sont difficiles et les conjectures incertaines, mentionnons encore le cas du graphe Q_n

de l'hypercube à n dimensions. En 1973, R. Guy et Paul Erdős proposèrent la formule : $cr(Q_n) = \{5 \times 4^n / 32 - 2^{n-2} \lfloor (n^2 + 1)/2 \rfloor\}$.

Pendant plus de 40 ans, elle a semblé correcte. Pourtant, Yuansheng Yang, Guoqing Wang, Haoli Wang et Yan Zhou, de l'Université de Dalian en Chine, trouvèrent en 2012 un contre-exemple pour $n = 7$ et toutes les valeurs supérieures. La conjecture est donc archaïque !

Imposer aux arcs d'être des segments de droite, nous l'avons dit, conduit à un problème différent, celui du calcul de $cr(G)$. Il se trouve qu'il est un peu plus facile, car le nombre de dessins différents à envisager est plus petit. Dans le cas du graphe K_n , les valeurs calculées et vérifiées vont jusqu'à $n = 27$ et on connaît en plus la valeur pour $n = 30$.

Peu d'espoir de pouvoir aller loin

En fait, les difficultés rencontrées sont peu étonnantes, car on sait depuis longtemps que le problème du calcul de $cr(G)$ est un problème de la classe NP-difficile. Cela signifie que si l'on savait le résoudre efficacement, alors on saurait aussi résoudre efficacement une grande famille de problèmes combinatoires difficiles, ce qui est plus qu'improbable. Cela n'empêche pas des progrès concrets en matière d'algorithmes.

On sait maintenant produire des dessins utiles en pratique pour des graphes de circuits comportant plusieurs centaines de nœuds. L'une des méthodes utilisées est la « planarisation » : on extrait du graphe un graphe planaire aussi grand que possible en ne retenant que certains arcs, et on ajoute ensuite avec précaution les arcs qui manquent en tentant de minimiser le nombre de croisements créés.

L'énigme du croisement des arcs d'un graphe montre que des thèmes de recherche que tout le monde peut comprendre concentrent parfois en eux toutes les difficultés possibles, et prouve une fois de plus que le monde mathématique, même là où on s'y attend le moins, comporte des obstacles surprenants... et peut-être insurmontables.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

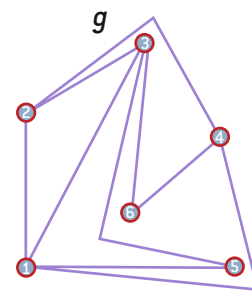
C. Buchheim et al., *Crossings and planarization*, *Handbook of Graph Drawing and Visualization* (éd. R. Tamassia), Chapman & Hall/CRC, 2013.

Y. Yang et al., *The Erdős and Guy conjectured equality on the crossing number of hypercubes*, 2012 : <http://arxiv.org/abs/1201.4700>

L. Beinke et R. Wilson, *The early history of the brick factory problem*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), pp. 41-47, 2010.

P. Erdős et R. Guy, *Crossing number problem*, *American Mathematical Monthly*, vol. 80, pp. 52-58, 1973.

K. Zarankiewicz, *On a problem of P. Turán concerning graphs*, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 41, pp. 137-145, 1954.



Solution de la question posée au début de l'article