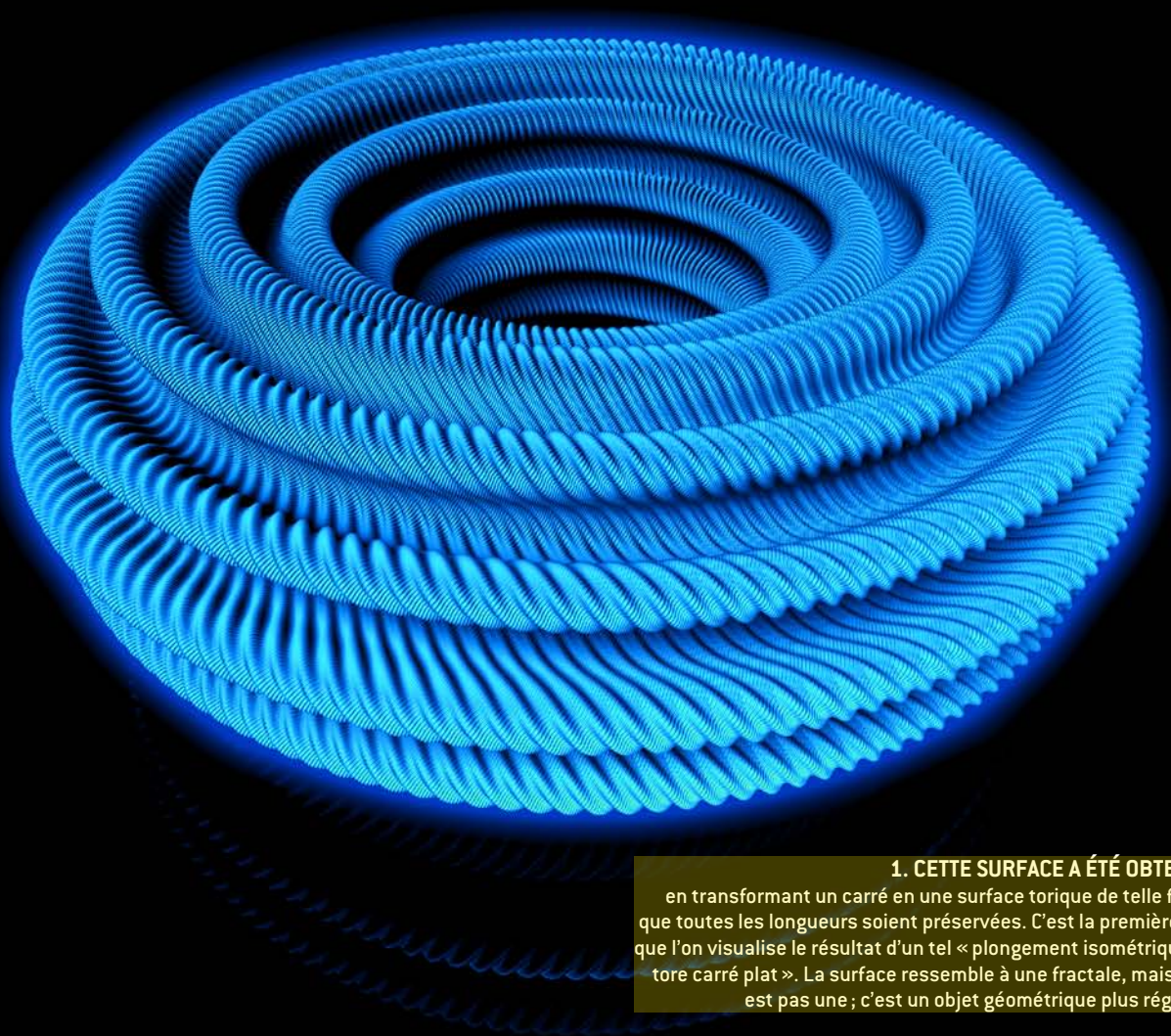


Les fractales lisses

Vincent Borrelli, Francis Lazarus et Boris Thibert

Il est possible de transformer une portion de plan en une surface torique sans modifier les longueurs. Le résultat, visualisé pour la première fois, inaugure une nouvelle famille d'objets géométriques.



1. CETTE SURFACE A ÉTÉ OBTENUE

en transformant un carré en une surface torique de telle façon que toutes les longueurs soient préservées. C'est la première fois que l'on visualise le résultat d'un tel « plongement isométrique du tore carré plat ». La surface ressemble à une fractale, mais n'en est pas une ; c'est un objet géométrique plus régulier.

En 1961, Pearl Buck écrivait : « Toute chose est possible tant qu'elle ne s'est pas révélée impossible – et même en ce cas, elle ne l'est peut-être que provisoirement. » Elle aurait pu citer John Nash en exemple. Dans les années 1950, ce mathématicien américain et futur prix Nobel d'économie découvrit à la surprise générale qu'un problème géométrique réputé impossible, celui du « plongement isométrique », avait en réalité des solutions en abondance. En deux mots – nous y reviendrons –, un plongement isométrique est une transformation qui fait passer d'un plan à une surface courbe en conservant toutes les distances.

Quelques pages d'arguments mathématiques suffirent à J. Nash pour passer de l'impossible au possible, en détruisant au passage un certain nombre de certitudes et d'intuitions. Mais il y avait un détail. Si sa démonstration ne laissait aucune place au doute, en pratique elle défiait l'imagination et personne ne voyait ni ne comprenait vraiment ces plongements isométriques. Or, grâce à une approche combinant mathématiques et informatique, nous avons récemment réussi à visualiser un plongement isométrique à la Nash (*voir la figure 1*). Le résultat est une surface d'un type inédit, que nous avons qualifiée de fractale lisse en raison de sa ressemblance avec les fractales.

Pour ce faire, nous avons mis en œuvre une théorie conçue par le mathématicien franco-russe Mikhaïl Gromov et nommée intégration convexe. Inspirée en partie des travaux de J. Nash, cette théorie constitue un outil puissant pour résoudre de nombreux problèmes mêlant géométrie et analyse. Son caractère abstrait semblait interdire toute application, mais nos travaux montrent sur un exemple qu'il n'en est rien. Cette théorie permet de résoudre de façon concrète certaines classes d'équations aux dérivées partielles (équations différentielles où les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables).

L'origine du problème du plongement isométrique remonte aux années 1850, à l'époque où Bernhard Riemann révolutionne la géométrie. Ce mathématicien allemand propose en effet un changement radical de perspective. Plutôt que de considérer les surfaces comme des objets de l'espace tridimensionnel, Riemann préfère les conceptualiser en les réduisant à des portions de plan. Ainsi, un cylindre ne sera pas pensé comme un tube, mais

comme un carré dont deux côtés opposés sont abstraitement identifiés. De même, une surface ayant la forme d'une bouée (un tore géométrique) sera conceptualisée comme un « tore carré », c'est-à-dire un carré dont les côtés opposés sont identifiés deux à deux (*voir la figure 2*).

Cette vision simplifie la façon de penser les surfaces, mais elle semble entachée d'un défaut rédhibitoire pour qui s'intéresse à la géométrie, c'est-à-dire à la mesure des longueurs et des angles. Hormis de rares exceptions, les longueurs ne se correspondent pas entre les surfaces et leurs idéalizations sous forme de portions de plan. Ainsi, sur la bouée, l'équateur extérieur est plus long que l'équateur intérieur, alors que les courbes correspondantes sur le tore carré, qui sont deux horizontales, ont même longueur (*voir la figure 3*).

L'ESSENTIEL

- En recollant ses côtés, un carré peut être courbé en une surface torique (une bouée). Si cette opération préserve les longueurs, on parle de « plongement isométrique du tore carré plat ».
- Ce plongement isométrique est possible à condition d'accepter des surfaces moins lisses que d'habitude.
- En appliquant la « théorie de l'intégration convexe », la surface obtenue par une telle transformation a été visualisée. Ni fractale ni surface ordinaire, elle constitue un nouveau type d'objet géométrique.

© Siu mention contraire, les illustrations sont de Vincent Borrelli, Said Jabrane, Francis Lazarus, Damien Rohmer et Boris Thibert

Pour Riemann, les surfaces sont des portions de plan

Riemann va corriger ce défaut en imaginant que la règle qui mesure les longueurs sur le tore carré se contracte ou se dilate selon la direction et l'endroit où on l'utilise. Il détermine précisément l'ampleur de ces variations pour que les longueurs mesurées coïncident avec celles directement observées sur la surface. Certes, c'est une façon inhabituelle de mesurer des distances, mais elle a pour avantage de coder toute la géométrie de la surface. L'outil mathématique permettant de réaliser ce codage, la règle fluctuante, porte depuis le nom de son inventeur, c'est la métrique riemannienne.

La démarche de Riemann permet de se désintéresser de la forme éventuellement très tourmentée des surfaces pour ne travailler qu'avec des domaines du plan munis de métriques riemanniennes. Elle suggère que l'objet essentiel n'est pas la surface, mais le couple formé par la portion de plan et sa métrique riemannienne. En fait, on peut totalement oublier les surfaces pour ne considérer que leur encodage sous forme d'une région du plan où les distances sont mesurées avec une règle fluctuante. Ce point de vue se révélera extraordinairement efficace. Il est en particulier à la base de la formulation mathématique de la théorie de la relativité générale.

Ainsi, pour Riemann, faire de la géométrie, c'est tout simplement opérer avec une