

En 1961, Pearl Buck écrivit : « Toute chose est possible tant qu'elle ne s'est pas révélée impossible – et même en ce cas, elle ne l'est peut-être que provisoirement. » Elle aurait pu citer John Nash en exemple. Dans les années 1950, ce mathématicien américain et futur prix Nobel d'économie découvrit à la surprise générale qu'un problème géométrique réputé impossible, celui du « plongement isométrique », avait en réalité des solutions en abondance. En deux mots – nous y reviendrons –, un plongement isométrique est une transformation qui fait passer d'un plan à une surface courbe en conservant toutes les distances.

Quelques pages d'arguments mathématiques suffirent à J. Nash pour passer de l'impossible au possible, en détruisant au passage un certain nombre de certitudes et d'intuitions. Mais il y avait un détail. Si sa démonstration ne laissait aucune place au doute, en pratique elle défiait l'imagination et personne ne voyait ni ne comprenait vraiment ces plongements isométriques. Or, grâce à une approche combinant mathématiques et informatique, nous avons récemment réussi à visualiser un plongement isométrique à la Nash (*voir la figure 1*). Le résultat est une surface d'un type inédit, que nous avons qualifiée de fractale lisse en raison de sa ressemblance avec les fractales.

Pour ce faire, nous avons mis en œuvre une théorie conçue par le mathématicien franco-russe Mikhaïl Gromov et nommée intégration convexe. Inspirée en partie des travaux de J. Nash, cette théorie constitue un outil puissant pour résoudre de nombreux problèmes mêlant géométrie et analyse. Son caractère abstrait semblait interdire toute application, mais nos travaux montrent sur un exemple qu'il n'en est rien. Cette théorie permet de résoudre de façon concrète certaines classes d'équations aux dérivées partielles (équations différentielles où les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables).

L'origine du problème du plongement isométrique remonte aux années 1850, à l'époque où Bernhard Riemann révolutionne la géométrie. Ce mathématicien allemand propose en effet un changement radical de perspective. Plutôt que de considérer les surfaces comme des objets de l'espace tridimensionnel, Riemann préfère les conceptualiser en les réduisant à des portions de plan. Ainsi, un cylindre ne sera pas pensé comme un tube, mais

comme un carré dont deux côtés opposés sont abstraitement identifiés. De même, une surface ayant la forme d'une bouée (un tore géométrique) sera conceptualisée comme un « tore carré », c'est-à-dire un carré dont les côtés opposés sont identifiés deux à deux (*voir la figure 2*).

Cette vision simplifie la façon de penser les surfaces, mais elle semble entachée d'un défaut rédhibitoire pour qui s'intéresse à la géométrie, c'est-à-dire à la mesure des longueurs et des angles. Hormis de rares exceptions, les longueurs ne se correspondent pas entre les surfaces et leurs idéalizations sous forme de portions de plan. Ainsi, sur la bouée, l'équateur extérieur est plus long que l'équateur intérieur, alors que les courbes correspondantes sur le tore carré, qui sont deux horizontales, ont même longueur (*voir la figure 3*).

L'ESSENTIEL

- En recollant ses côtés, un carré peut être courbé en une surface torique (une bouée). Si cette opération préserve les longueurs, on parle de « plongement isométrique du tore carré plat ».
- Ce plongement isométrique est possible à condition d'accepter des surfaces moins lisses que d'habitude.
- En appliquant la « théorie de l'intégration convexe », la surface obtenue par une telle transformation a été visualisée. Ni fractale ni surface ordinaire, elle constitue un nouveau type d'objet géométrique.

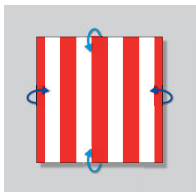
© Siuf mention contraire, les illustrations sont de Vincent Borelli, Said Jabrane, Francis Lazarus, Damien Rohmer et Boris Thibert

Pour Riemann, les surfaces sont des portions de plan

Riemann va corriger ce défaut en imaginant que la règle qui mesure les longueurs sur le tore carré se contracte ou se dilate selon la direction et l'endroit où on l'utilise. Il détermine précisément l'ampleur de ces variations pour que les longueurs mesurées coïncident avec celles directement observées sur la surface. Certes, c'est une façon inhabituelle de mesurer des distances, mais elle a pour avantage de coder toute la géométrie de la surface. L'outil mathématique permettant de réaliser ce codage, la règle fluctuante, porte depuis le nom de son inventeur, c'est la métrique riemannienne.

La démarche de Riemann permet de se désintéresser de la forme éventuellement très tourmentée des surfaces pour ne travailler qu'avec des domaines du plan munis de métriques riemanniennes. Elle suggère que l'objet essentiel n'est pas la surface, mais le couple formé par la portion de plan et sa métrique riemannienne. En fait, on peut totalement oublier les surfaces pour ne considérer que leur encodage sous forme d'une région du plan où les distances sont mesurées avec une règle fluctuante. Ce point de vue se révélera extraordinairement efficace. Il est en particulier à la base de la formulation mathématique de la théorie de la relativité générale.

Ainsi, pour Riemann, faire de la géométrie, c'est tout simplement opérer avec une



Patrick Massot

2. RÉALISATION D'UN CYLINDRE ET D'UNE SURFACE TORIQUE à partir d'un carré. Le cylindre s'obtient en recollant deux côtés opposés du carré ; la surface torique nécessite en plus de recoller les deux

autres côtés. Le problème du plongement isométrique pour le « tore carré plat » est celui de trouver une façon d'effectuer tous ces recollements sans modifier les distances.

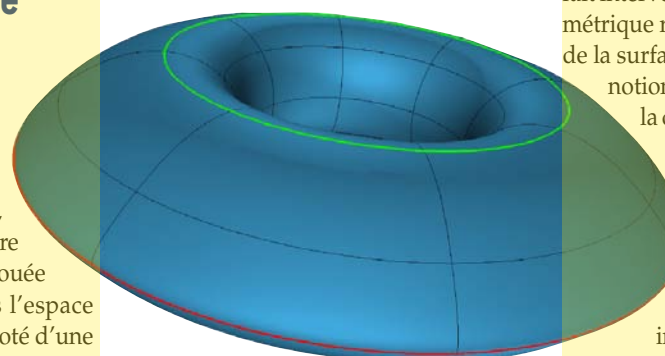
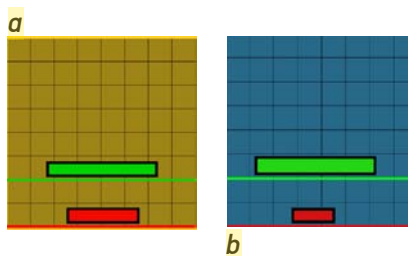
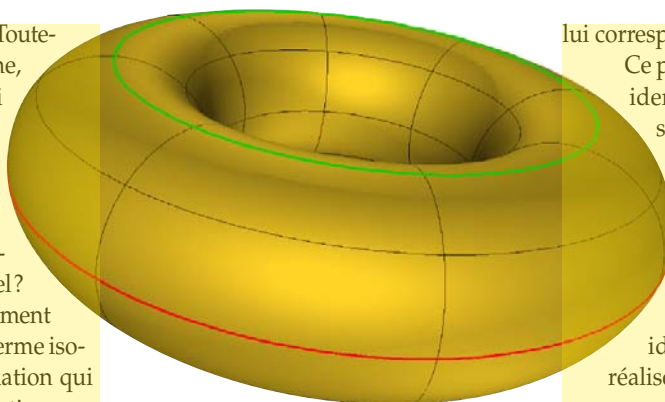
règle plus ou moins capricieuse. Toutefois, avec cette nouvelle approche, une question épineuse se pose : si l'on choisit arbitrairement une façon de faire varier la longueur de la règle sur une portion de plan, existe-t-il une surface qui réalise concrètement cette géométrie dans l'espace tridimensionnel ? Tel est le problème dit du plongement isométrique (rappelons que le terme isométrie désigne toute transformation qui conserve les distances ; les rotations ou translations globales en sont des exemples).

Cela revient à déterminer s'il y a équivalence entre les surfaces riemanniennes – des portions de plan munies d'une certaine métrique – et les surfaces au sens usuel. Comme on le verra, la réponse apportée par J. Nash est positive.

Du carré au tore en gardant les longueurs

Le problème du plongement isométrique est d'une difficulté redoutable. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas du tore carré. Nous avons vu que la bouée est la surface qui réalise dans l'espace tridimensionnel un tore carré doté d'une certaine règle, dont la taille se modifie au gré de la position. Or rien n'empêche de considérer ce même tore carré, mais avec d'autres règles, et de former ainsi d'autres objets géométriques abstraits. Parmi ces derniers, le plus simple est celui obtenu en choisissant une règle invariable ; cet objet est nommé « tore carré plat ».

La bouée ne pouvant alors correspondre à une réalisation de ce tore carré plat, le problème du plongement isométrique pour ce tore est précisément de savoir quelle est la surface de l'espace tridimensionnel qui



3. SUR LA SURFACE TORIQUE JAUNE, la courbe rouge est plus longue que la courbe verte. Cette surface peut être obtenue en joignant les côtés d'un carré où les longueurs sont mesurées avec une règle variable, l'horizontale rouge étant mesurée avec une unité de longueur plus courte que celle utilisée pour l'horizontale verte [a]. Un rétrécissement de la règle rouge dans le carré a pour effet d'augmenter la longueur de l'horizontale rouge sur la surface torique, ce qui modifie sa géométrie [b]. Existe-t-il une surface pour n'importe quel choix des règles sur le carré ? Tel est le problème du plongement isométrique.

lui correspond, si d'aventure elle existe.

Ce problème revient à effectuer les identifications du tore carré plat sans modifier les longueurs, c'est-à-dire à recoller matériellement les côtés opposés d'un carré pour obtenir une surface. Quelques essais avec une simple feuille de papier montrent à quel point ces identifications sont difficiles à réaliser : le papier se froisse, se plie, se corne et l'objet final ne ressemble en rien à une surface. Serait-il impossible de réaliser ces recollements de façon à obtenir une surface digne de ce nom ?

Une grandeur géométrique nommée courbure de Gauss permet de répondre à la question. Comme son nom le suggère, elle mesure la courbure d'une surface. Elle s'obtient au moyen d'un calcul (qui fait intervenir les dérivées secondes de la métrique riemannienne ou de l'équation de la surface) et recouvre peu ou prou la notion intuitive de courbure. Ainsi, la courbure de Gauss est nulle sur un plan ; elle l'est aussi sur un cylindre (que l'on peut dérouler parfaitement sur un plan) ; elle est presque imperceptible pour une sphère de la taille de notre planète, mais importante pour les planètes que visite le Petit Prince. Elle possède une

propriété étonnante mise au jour au début du XIX^e siècle par Carl Friedrich Gauss : elle reste inchangée si l'on déforme la surface tout en préservant les distances.

La remarquable invariance de la courbure de Gauss est à l'origine du rôle central que joue cette dernière en géométrie, en particulier dans le problème du plongement isométrique. Qu'implique-t-elle dans le cas du tore carré plat ? La courbure de cet objet géométrique est nulle ; si l'on « plonge » le tore carré plat dans l'espace tridimensionnel

en formant une surface ressemblant à une bouée et si l'on respecte les distances lors de ce plongement, la surface résultante devra, elle aussi, être de courbure nulle. C'est une contrainte très forte. Or on démontre qu'on ne peut pas la satisfaire : sur une surface en forme de bouée, il y a toujours des endroits où la courbure est non nulle. Le problème du plongement isométrique pour le tore carré plat est donc impossible.

Pourtant, en 1954, J. Nash a surpris la communauté mathématique en révélant que cette impossibilité est relative, trompeuse et contournable. Il découvrit en effet que loin d'être impossibles, les plongements isométriques existent de façon pléthorique. Ses travaux ont été complétés un an après par le mathématicien hollandais Nicolaas Kuiper (1920-1994). Ce dernier s'est intéressé, entre autres, au cas du tore carré plat et a montré que l'on peut effectivement le réaliser d'une infinité de façons différentes dans l'espace euclidien tridimensionnel.

Comment expliquer l'existence de plongements isométriques du tore carré plat (et, plus généralement, de toutes sortes de surfaces riemanniennes) alors que, en s'appuyant sur la courbure de Gauss, on avait montré qu'ils étaient impossibles ? Il est nécessaire pour cela de s'intéresser à la régularité des surfaces. Une surface est certes un objet lisse, sans aspérité ni pincement, mais il y a plusieurs degrés dans cette « lissité ».

Une façon intuitive de comprendre ces degrés de lissité est de considérer des surfaces ressemblant à des pistes pour planches à roulettes. En première approximation, une telle surface s'obtient simplement en accolant en continuité un plan et une paroi courbée comme un cercle. Toutefois, un skateur qui dévalerait la pente la plus raide de cette surface ressentirait un choc au passage de la ligne de raccord (*voir la rubrique Idées de physique, page 90*). Ce choc est dû à la discontinuité de la courbure : immédiatement après la portion circulaire, la courbure s'annule brutalement. Au contraire, dans une véritable piste de planches à roulettes, la courbure varie de façon continue, ce qui permet de dévaler la pente sans à-coup. Par conséquent, même si à l'œil les deux pistes présentent des formes comparables, la véritable piste est en réalité plus lisse que son ersatz en deux morceaux.

Le calcul différentiel permet de distinguer ces différences de lissité et de les

classer. Le premier barreau de l'échelle s'appelle la régularité C^1 ; plus précisément, une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^1 si ses dérivées premières existent et sont continues en chaque point. Le deuxième barreau est la classe C^2 , qui correspond à l'existence et à la continuité des dérivées secondes (et *a fortiori* des dérivées premières). Et ainsi de suite, les fonctions les plus régulières de cette échelle étant celles de classe C^∞ , qui sont infiniment dérivables.

En quoi ces raffinements dans la régularité des surfaces peuvent-ils élucider le paradoxe qui nous occupe ? L'impossibilité du plongement isométrique du tore plat n'a été démontrée qu'au prix d'un raisonnement faisant jouer un rôle central à la courbure de Gauss. Or celle-ci n'existe que si la surface est assez régulière : elle doit être de classe C^2 au moins. Si la surface n'est pas suffisamment lisse, si elle est de classe C^1 seulement, alors sa courbure n'est plus calculable et cette notion perd son sens. Par conséquent, tout raisonnement utilisant la courbure ne peut conduire qu'à des impossibilités relatives, ne concernant que des surfaces de classe C^2 ou plus. Aucun de ces raisonnements ne pourra interdire la possibilité de réaliser le tore carré plat au moyen d'une surface moins lisse, de classe C^1 . Ainsi, avec la perte d'un seul degré de régularité, une frontière invisible est franchie et donne accès à un monde où la courbure de Gauss n'impose plus sa loi.

Un monde sans interdits

La disparition de la courbure de Gauss permet-elle pour autant la réalisation du tore carré plat ? *A priori*, mille autres obstacles pourraient – devraient – surgir et en interdire définitivement l'existence. La grande surprise du résultat de J. Nash, c'est précisément qu'aucun autre obstacle n'apparaît. L'effacement de la courbure ne signifie donc pas qu'elle cède sa place à d'autres formes de contrainte, mais bien qu'elle offre au mathématicien une totale liberté.

Pour mieux comprendre la surprise des mathématiciens, il faut avoir en tête la façon dont s'articule une démonstration en géométrie différentielle. Rappelons que cette branche des mathématiques met à profit le calcul différentiel (les dérivées, les intégrales) pour comprendre des objets tels que les courbes ou les surfaces. Une démonstration en géométrie différentielle

■ LES AUTEURS



Vincent BORRELLI est maître de conférences en mathématiques à l'Université Claude Bernard et membre de l'Institut Camille Jordan, à Lyon.



Francis LAZARUS, informaticien, est chargé de recherche au CNRS et membre du Laboratoire

Gipsa-lab, à Grenoble.



Boris THIBERT est maître de conférences en mathématiques appliquées à l'Université

Joseph Fourier et membre du Laboratoire Jean Kuntzmann, à Grenoble.

■ BIBLIOGRAPHIE

V. Borrelli et al., Flat tori in three-dimensional space and convex integration, *PNAS*, vol. 109(19), pp. 7218-7223, 2012.

M. Audin et P. Pansu, Le h-principe de Misha Gromov, *Images des Mathématiques*, 25 juin 2009 : <http://images.math.cnrs.fr/Le-h-principe-de-Misha-Gromov.html>

V. Borrelli, Gnash, un tore plat !, *Images des Mathématiques*, 10 juin 2012 : <http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html>

Équipe Hévéa, Les tores plats visualisés !, sur : <http://math.univ-lyon1.fr/borrelli/Hevea/Presse/index.html>

P. Pansu, Rencontre avec Misha Gromov, *Images des Mathématiques*, 1979 : <http://images.math.cnrs.fr/Rencontre-avec-Misha-Gromov-1979.html>