

en formant une surface ressemblant à une bouée et si l'on respecte les distances lors de ce plongement, la surface résultante devra, elle aussi, être de courbure nulle. C'est une contrainte très forte. Or on démontre qu'on ne peut pas la satisfaire : sur une surface en forme de bouée, il y a toujours des endroits où la courbure est non nulle. Le problème du plongement isométrique pour le tore carré plat est donc impossible.

Pourtant, en 1954, J. Nash a surpris la communauté mathématique en révélant que cette impossibilité est relative, trompeuse et contournable. Il découvrit en effet que loin d'être impossibles, les plongements isométriques existent de façon pléthorique. Ses travaux ont été complétés un an après par le mathématicien hollandais Nicolaas Kuiper (1920-1994). Ce dernier s'est intéressé, entre autres, au cas du tore carré plat et a montré que l'on peut effectivement le réaliser d'une infinité de façons différentes dans l'espace euclidien tridimensionnel.

Comment expliquer l'existence de plongements isométriques du tore carré plat (et, plus généralement, de toutes sortes de surfaces riemanniennes) alors que, en s'appuyant sur la courbure de Gauss, on avait montré qu'ils étaient impossibles ? Il est nécessaire pour cela de s'intéresser à la régularité des surfaces. Une surface est certes un objet lisse, sans aspérité ni pincement, mais il y a plusieurs degrés dans cette « lissité ».

Une façon intuitive de comprendre ces degrés de lissité est de considérer des surfaces ressemblant à des pistes pour planches à roulettes. En première approximation, une telle surface s'obtient simplement en accolant en continuité un plan et une paroi courbée comme un cercle. Toutefois, un skateur qui dévalerait la pente la plus raide de cette surface ressentirait un choc au passage de la ligne de raccord (*voir la rubrique Idées de physique, page 90*). Ce choc est dû à la discontinuité de la courbure : immédiatement après la portion circulaire, la courbure s'annule brutalement. Au contraire, dans une véritable piste de planches à roulettes, la courbure varie de façon continue, ce qui permet de dévaler la pente sans à-coup. Par conséquent, même si à l'œil les deux pistes présentent des formes comparables, la véritable piste est en réalité plus lisse que son ersatz en deux morceaux.

Le calcul différentiel permet de distinguer ces différences de lissité et de les

classer. Le premier barreau de l'échelle s'appelle la régularité C^1 ; plus précisément, une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^1 si ses dérivées premières existent et sont continues en chaque point. Le deuxième barreau est la classe C^2 , qui correspond à l'existence et à la continuité des dérivées secondes (et *a fortiori* des dérivées premières). Et ainsi de suite, les fonctions les plus régulières de cette échelle étant celles de classe C^∞ , qui sont infiniment dérivables.

En quoi ces raffinements dans la régularité des surfaces peuvent-ils élucider le paradoxe qui nous occupe ? L'impossibilité du plongement isométrique du tore plat n'a été démontrée qu'au prix d'un raisonnement faisant jouer un rôle central à la courbure de Gauss. Or celle-ci n'existe que si la surface est assez régulière : elle doit être de classe C^2 au moins. Si la surface n'est pas suffisamment lisse, si elle est de classe C^1 seulement, alors sa courbure n'est plus calculable et cette notion perd son sens. Par conséquent, tout raisonnement utilisant la courbure ne peut conduire qu'à des impossibilités relatives, ne concernant que des surfaces de classe C^2 ou plus. Aucun de ces raisonnements ne pourra interdire la possibilité de réaliser le tore carré plat au moyen d'une surface moins lisse, de classe C^1 . Ainsi, avec la perte d'un seul degré de régularité, une frontière invisible est franchie et donne accès à un monde où la courbure de Gauss n'impose plus sa loi.

Un monde sans interdits

La disparition de la courbure de Gauss permet-elle pour autant la réalisation du tore carré plat ? *A priori*, mille autres obstacles pourraient – devraient – surgir et en interdire définitivement l'existence. La grande surprise du résultat de J. Nash, c'est précisément qu'aucun autre obstacle n'apparaît. L'effacement de la courbure ne signifie donc pas qu'elle cède sa place à d'autres formes de contrainte, mais bien qu'elle offre au mathématicien une totale liberté.

Pour mieux comprendre la surprise des mathématiciens, il faut avoir en tête la façon dont s'articule une démonstration en géométrie différentielle. Rappelons que cette branche des mathématiques met à profit le calcul différentiel (les dérivées, les intégrales) pour comprendre des objets tels que les courbes ou les surfaces. Une démonstration en géométrie différentielle

LES AUTEURS



Vincent BORRELLI est maître de conférences en mathématiques à l'Université Claude Bernard

et membre de l'Institut Camille Jordan, à Lyon.



Francis LAZARUS, informaticien, est chargé de recherche au CNRS et membre du Laboratoire

Gipsa-lab, à Grenoble.



Boris THIBERT est maître de conférences en mathématiques appliquées à l'Université

Joseph Fourier et membre du Laboratoire Jean Kuntzmann, à Grenoble.

BIBLIOGRAPHIE

V. Borrelli et al., Flat tori in three-dimensional space and convex integration, *PNAS*, vol. 109(19), pp. 7218-7223, 2012.

M. Audin et P. Pansu, Le h-principe de Misha Gromov, *Images des Mathématiques*, 25 juin 2009 : <http://images.math.cnrs.fr/Le-h-principe-de-Misha-Gromov.html>

V. Borrelli, Gnash, un tore plat !, *Images des Mathématiques*, 10 juin 2012 : <http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html>

Équipe Hévéa, Les tores plats visualisés !, sur : <http://math.univ-lyon1.fr/borrelli/Hevea/Presse/index.html>

P. Pansu, Rencontre avec Misha Gromov, *Images des Mathématiques*, 1979 : <http://images.math.cnrs.fr/Rencontre-avec-Misha-Gromov-1979.html>